

ЗА ВЕКТОРНОТО ПРОСТРАНСТВО НА МАГИЧЕСКИТЕ КВАДРАТИ ОТ ЧЕТВЪРТИ РЕД (В ЗАНИМАТЕЛНАТА МАТЕМАТИКА)

В памет на проф. д-р Маргарита Върбанова

Здравко Лалчев, Ирина Вутова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. В настоящата разработка е възприета по-обща (от традиционната) дефиниция на понятието магически квадрати от четвърти ред и са посочени достатъчни условия за тяхното съществуване. С елементарни средства на линейната алгебра са изследвани съществени векторно-алгебрични свойства на магическите квадрати от четвърти ред. Направено е непосредствено доказателство на теоремата за размерността на тяхното векторно пространство, без да бъде използвана по-общата теорема за размерността на векторното пространство на магическите квадрати от ред n ($n \geq 3$). Чрез решаване на линейна система от 10 линейни уравнения със 17 неизвестни е показано, че при съставяне на магически квадрат от четвърти ред (в общия случай) осем (от шестнадесетте) координати могат да бъдат зададени произволно. В подкрепа на тезата са формулирани и решени две задачи. Работата е предназначена за учебни часове по занимателна математика.

Ключови думи: магически квадрати; векторно пространство; метода на Гаус-Жордан; занимателна математика

1. Вместо предисловие

Историята на магическите квадрати води своето начало още от дълбока древност. Например магически квадрат от трети ред е намерен в Древен Китай в книга, писана 40 века преди н.е., а магически квадрат от четвърти ред е намерен в Индия – I век от н.е. Магическите квадрати са известни във Византия (Емануил Мосхопулос – XIII век) и в Западна Европа (Албрехт Дюрер – XVI век).

Обикновено магическите квадрати са свързани с естествените числа от 1 до n^2 , където $n \geq 3$ или с първите n^2 членове на аритметична прогресия от естествени числа. Но последните 60 – 70 години се наблюдава разширяване на „дефиниционното“ множество на магическите квадрати. В научнопопулярната и математическата литература се появяват магически квадрати, чиито елементи са реални (дори комплексни) числа. Новата дефиниция води след

себе си както нови свойства, така и нови задачи. Например възниква задачата за това колко числа могат да бъдат избирани произволно, за да може да бъде построен магически квадрат от даден ред, или казано по друг начин, каква е размерността на векторното пространство на магическите квадрати от един или друг ред.

Във връзка с последната трактовка на магическите квадрати, считаме че е важно да споменем накратко за два библиографски източника, които до този момент са ни известни. Първият източник е книгата „Математическая смекалка“ на големия руски популяризатор на математиката Борис Кордемски, която през 1964 година е преведена на български език под наименованието „Математическа досетливост“ (преводът е направен по второто издание на книгата от 1955 година.) В дванадесета глава на българското издание, озаглавена „Кръстосани суми и възшебни квадрати“, е изведено (с помощта на не съвсем елементарни разсъждения) твърдението, че за построяване на магически квадрат от ред n числата, които могат да бъдат избрани произволно, са $n^2 - 2n$ на брой (Кордемски, 1964). Другият източник ни беше посочен от рецензентите (за което сме благодарни) по време на коректурите на настоящата работа. Става дума за статията „Vector Space of Magic Squares“ с автор James E. Ward III, поместена в американското списание *Mathematics Magazine* през 1980 година. Централната теорема в цитираната статия се отнася за размерността на векторното пространство на магическите квадрати от ред n ($n \geq 3$) и по-конкретно, че тази размерност е $n^2 - 2n$. Доказателството на теоремата е направено със средствата на линейната алгебра, като предварително е доказано, че размерността на векторното пространство на магическите квадрати от ред n с характеристично число 0 е $n^2 - 2n - 1$. (Ward III, 1980). Теоремите, доказани в двата източника („Математическа досетливост“ и „Vector Space of Magic Squares“), са формулирани по различни начини, но от математическа гледна точка са еквивалентни. Като следствие от тях произтича и верността на твърдението за размерността (осем) на векторното пространство на магическите квадрати от четвърти ред.

От друга страна, тъй като целта на настоящата статия е съсредоточена върху (практическо) построяване на магически квадрати от конкретен (четвърти) ред, то ние (авторите) намираме за дидактически целесъобразно да не „минаваме“ през общия случай, а да изложим непосредствено доказателство на теоремата за размерността на векторното пространство в конкретния случай. Още повече, че конкретното доказателство дава възможност за пряко конструиране на конкретни (примерни) базиси на векторното пространство на разглежданите магическите квадрати.

2. Предварителни бележки за числовите и магическите квадрати

Още в началото ще уточним, че в следващите редове ще става дума за числови квадрати от четвърти ред.

Нека числата: $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}, \alpha_{44}$, са реални и квадратната таблица Δ от ред 4

$$\Delta = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}$$

е числов квадрат, за който сборовете по редове, по колони и по диагонали е винаги едно и също число (S). В този случай се казва, че Δ е **магически квадрат**. Който и да е от неговите сборове (числото S) се нарича **характеристично число** на квадрата.

Ето примери на магически квадрати от четвърти ред:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

$$S_A = 34, B =$$

0	3	10	13
4	15	6	1
17	2	3	4
5	6	7	8

$$S_B = 26$$

1	2	3	4
5	6	7	-8
8	3	-6	5
-4	-1	6	9

$$C = S_C = 10, D =$$

5	1	6	-12
0	-4	7	-3
-15	-5	2	18
10	8	-15	-3

$$S_D = 0$$

3. Лесен начин за построяване на магически квадрат от четвърти ред

В забележителната книга по занимателна математика на У. Бол и Г. Коксетер „Математически есе и развлечения“ (Ball & Coxeter, 1986) намираме интересни методи за построяване на магически квадрати, които са достъпни и за учениците от началните класове. Накратко ще представим един начин (заимстван от книгата) за построяване на магически квадрат от четвърти ред. Убедени сме, че предлаганият алгоритъм може да бъде използван успешно от учителя в неговите уроци по математика.

Ето последователните стъпки (действия).

- 1) Започваме от квадрат, в който числата от 1 до 16 са записани във възходящ ред (фиг. 1а).
- 2) Намираме двойките централно симетрични числа от диагоналите, т.е. (1, 16), (6, 11), (4, 13), (7, 10).
- 3) Разменяме местата на числата във всяка от двойките и получаваме търсения магически квадрат (фиг. 1б).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

а)

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

б)

Фигура 1

4. Достатъчни условия за съществуването на магически квадрат от 4-ти ред

4.1. Теорема. Нека числата:

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$
са такива, че:

$$a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = a_6 - a_5 = a_8 - a_7 = a_{10} - a_9 = a_{12} - a_{11} = \\ = a_{14} - a_{13} = a_{16} - a_{15} = A$$

$$a_3 - a_2 = a_7 - a_6 = a_{11} - a_{10} = a_{15} - a_{14} = B$$

$$a_5 - a_4 = a_{13} - a_{12} = C.$$

Тогава посочените числа са елементи на магически квадрат от четвърти ред.

Доказателство

Да въведем означенията:

$$a_1 = a, a_9 - a_8 = D.$$

Тогава:

$$a_1 = a, a_2 = a + A, a_3 = a + A + B, a_4 = a + 2A + B,$$

$$a_5 = a + 2A + B + C, a_6 = a + 3A + B + C, a_7 = a + 3A + 2B + C,$$

$$a_8 = a + 4A + 2B + C,$$

$$a_9 = a + 4A + 2B + C + D, a_{10} = a + 5A + 2B + C + D, a_{11} = a + 5A + 3B + C + D,$$

$$a_{12} = a + 6A + 3B + C + D,$$

$$a_{13} = a + 6A + 3B + 2C + D, a_{14} = a + 7A + 3B + 2C + D,$$

$$a_{15} = a + 7A + 4B + 2C + D, a_{16} = a + 8A + 4B + 2C + D.$$

Да разгледаме числовия квадрат K , където

$$K = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_{15} & a_{14} & a_4 \\ \hline a_{12} & a_6 & a_7 & a_9 \\ \hline a_8 & a_{10} & a_{11} & a_5 \\ \hline a_{13} & a_3 & a_2 & a_{16} \\ \hline \end{array}.$$

Ще докажем, че K е магически квадрат.

Действително:

$$a_1 + a_{15} + a_{14} + a_4 = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_{12} + a_6 + a_7 + a_9 = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_8 + a_{10} + a_{11} + a_5 = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_{13} + a_3 + a_2 + a_{16} = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_1 + a_{12} + a_8 + a_{13} = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_{15} + a_6 + a_{10} + a_3 = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_{14} + a_7 + a_{11} + a_2 = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_4 + a_9 + a_5 + a_{16} = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

$$a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D = S$$

Следователно квадратът K е магически с характеристично число

$$S = 4a + 16A + 8B + 4C + 2D.$$

4.2. Следствия

Следствие 1. Нека числата:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$$

са такива, че наредените четворки:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4), (a_5, a_6, a_7, a_8), (a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}), (a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16})$$

са аритметични прогресии с една и съща разлика d и $a_5 - a_4 = a_{13} - a_{12}$.

Тогава посочените числа са елементи на магически квадрат от четвърти ред.

Следствие 2. Нека числата:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}$$

са последователни членове (в този ред) на аритметична прогресия с разлика d . Тогава съществува магически квадрат, на който същите числа са елементи.

5. За векторното пространство на магическите квадрати от четвърти ред

5.1. Предварителни бележки

Нека A и B , където

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}
b_{21}	b_{22}	b_{23}	b_{24}
b_{31}	b_{32}	b_{33}	b_{34}
b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}

$A =$ и $B =$ са числови квадрати.

Тогава числовият квадрат C , където

c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}

$C =$ и

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11} + b_{11}, c_{12} = a_{12} + b_{12}, c_{13} = a_{13} + b_{13}, c_{14} = a_{14} + b_{14}, \\ c_{21} &= a_{21} + b_{21}, c_{22} = a_{22} + b_{22}, c_{23} = a_{23} + b_{23}, c_{24} = a_{24} + b_{24}, \\ c_{31} &= a_{31} + b_{31}, c_{32} = a_{32} + b_{32}, c_{33} = a_{33} + b_{33}, c_{34} = a_{34} + b_{34}, \\ c_{41} &= a_{41} + b_{41}, c_{42} = a_{42} + b_{42}, c_{43} = a_{43} + b_{43}, c_{44} = a_{44} + b_{44} \end{aligned}$$

се нарича **алгебричен сбор** на квадратите A и B . (Записва се: $A + B = C$.)

Нека λ е число. Тогава числовият квадрат D , където

d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}

$D =$ и

$$\begin{aligned}d_{11} &= \lambda a_{11}, d_{12} = \lambda a_{12}, d_{13} = \lambda a_{13}, d_{14} = \lambda a_{14}, \\d_{21} &= \lambda a_{21}, d_{22} = \lambda a_{22}, d_{23} = \lambda a_{23}, d_{24} = \lambda a_{24}, \\d_{31} &= \lambda a_{31}, d_{32} = \lambda a_{32}, d_{33} = \lambda a_{33}, d_{34} = \lambda a_{34}, \\d_{41} &= \lambda a_{41}, d_{42} = \lambda a_{42}, d_{43} = \lambda a_{43}, d_{44} = \lambda a_{44}\end{aligned}$$

се нарича **произведение на числото** λ и квадрата A . (Записва се: $\lambda \cdot A = D$.)

Тъй като всеки числов квадрат от четвърти ред може да се разглежда и като наредена шестнадесеторка от числа –

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44})$, то множеството на числовите квадрати от четвърти ред е векторно пространство с размерност числото 16.

От друга страна, нулевата матрица е магически квадрат, сборът на два магически квадрата е магически квадрат и произведението на число и магически квадрат е магически квадрат. Това означава, че множеството на магическите квадрати, от своя страна, също е векторно пространство – подпространство на векторното пространство на числовите квадрати.

Изниква въпрос за размерността на векторното пространство на магическите квадрати от четвърти ред. Този въпрос е свързан с въпроса колко от шестнадесетте числа, които участват в магическия квадрат, могат бъдат избрани произволно и как се определят останалите. На повдигнатите въпроси ще отговорим в следващите редове.

5.2. Теорема. Векторното пространство на магическите квадрати от четвърти ред е осеммерно.

Доказателство

1) Да фиксираме осем от 16-те елемента –

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ на магическия квадрат Δ , където

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline \end{array}$$

Нека фиксиранияте елемента са: $a_{24}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$.

За удобство да въведем означенията:

$$a_{24} = k, a_{32} = l, a_{33} = m, a_{34} = n, a_{41} = p, a_{42} = q, a_{43} = r, a_{44} = s.$$

И така, числата:

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, k, a_{31}, l, m, n, p, q, r, s$
са такива, че Δ , където

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & k \\ \hline a_{31} & l & m & n \\ \hline p & q & r & s \\ \hline \end{array}$$

е магически квадрат с характеристично число S .

Ще докажем, че числата: $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}$ еднозначно се определят от числата: k, l, m, n, p, q, r, s .

Действително. Условието на задачата е еквивалентно на системата от 10 уравнения:

$$\begin{array}{lcl} a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = S & (1) \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} + k = S & (2) \\ a_{31} + l + m + n = S & (3) \\ p + q + r + s = S & (4) \\ a_{11} + a_{21} + a_{31} + p = S & (5) \\ a_{12} + a_{22} + l + q = S & (6) \\ a_{13} + a_{23} + m + r = S & (7) \\ a_{14} + k + n + s = S & (8) \\ a_{11} + a_{22} + m + s = S & (9) \\ a_{14} + a_{23} + l + p = S & (10) \end{array}$$

Последователно изразяваме членовете: $a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{13}$ чрез фиксирани-те елементи – $\{k, l, m, n, p, q, r, s\}$, ($S = p + q + r + s$).

Така достигахме до система от 5 уравнения с 4 неизвестни – $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$:

$$\begin{array}{lcl} a_{11} + a_{12} = 2k - l + m + 2n - 2p - q + s \\ a_{21} + a_{22} = -2k + l - n + 2p + q + r \\ a_{11} + a_{21} = l + m + n - p \\ a_{12} + a_{22} = -l + p + r + s \\ a_{11} + a_{22} = -m + p + q + r \end{array}$$

Матрицата на получената система е показана по-долу в таблица 1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2k - l + m + 2n - 2p - q + s \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2k + l - n + 2p + q + r \\ 1 & 0 & 1 & 0 & l + m + n - p \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -l + p + r + s \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -m + p + q + r \end{array} \right)$$

Таблица 1

Преобразуваме последователно матрицата на системата по метода на Гаус – Жордан и достигаме до матрицата, показана на таблица 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & k + n - p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & k - l + m + n - p - q + s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -k + l + m \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k - m - n + 2p + q + r \end{array} \right)$$

Таблица 2

Следователно за числата a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{22} , a_{23} , k , a_{31} , l , m , n , p , q , r , s на магическия квадрат Δ са верни следните равенства:

$$\begin{aligned} a_{11} &= k + n - p; \\ a_{12} &= k - l + m + n - p - q + s; \\ a_{13} &= -k + l - m - n + 2p + q; \\ a_{14} &= -k - n + p + q + r; \\ a_{21} &= -k + l + m; \\ a_{22} &= -k - m - n + 2p + q + r; \\ a_{23} &= k - l + n - p + s; \\ a_{24} &= k; \\ a_{31} &= -l - m - n + p + q + r + s; \quad a_{32} = l; \quad a_{33} = m; \quad a_{34} = n; \\ a_{41} &= p; \quad a_{42} = q; \quad a_{43} = r; \quad a_{44} = s. \end{aligned}$$

2) Използваме получените зависимости на елементите на магическия квадрат и построяваме системата от 8 квадрата ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$) по следния начин:

- Δ_1 е квадрат, за който $k = 1, l = 0, m = 0, n = 0, p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$;
 Δ_2 е квадрат, за който $k = 0, l = 1, m = 0, n = 0, p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$;
 Δ_3 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 1, n = 0, p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$;
 Δ_4 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 0, n = 1, p = 0, q = 0, r = 0, s = 0$;
 Δ_5 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 0, n = 0, p = 1, q = 0, r = 0, s = 0$;
 Δ_6 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 0, n = 0, p = 0, q = 1, r = 0, s = 0$;
 Δ_7 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 0, n = 0, p = 0, q = 0, r = 1, s = 0$;
 Δ_8 е квадрат, за който $k = 0, l = 0, m = 0, n = 0, p = 0, q = 0, r = 0, s = 1$.

 $\Delta_1 =$

1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0

 $\Delta_2 =$

0	-1	1	0
1	0	-1	0
-1	1	0	0
0	0	0	0

 $\Delta_3 =$

0	1	-1	0
1	-1	0	0
-1	0	1	0
0	0	0	0

 $\Delta_4 =$

1	1	-1	-1
0	-1	1	0
-1	0	0	1
0	0	0	0

 $\Delta_5 =$

-1	-1	2	1
0	2	-1	0
1	0	0	0
1	0	0	0

 $\Delta_6 =$

0	-1	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0

 $\Delta_7 =$

0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	0

 $\Delta_8 =$

0	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	0
0	0	0	1

Може да се провери директно, че всеки от осемте квадрата на системата е магически.

Ще докажем, че тази система е линейно независима.

Нека $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, са 8 числа, за които линейната комбинация от магическите квадрати $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$, с коефициенти съответните числа е равна на нулевия квадрат Ω , т.е.

$$x_1\Delta_1 + x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3 + x_4\Delta_4 + x_5\Delta_5 + x_6\Delta_6 + x_7\Delta_7 + x_8\Delta_8 = \Omega,$$

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

където $\Omega =$

Това означава, че:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0. \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 - 1x_5 - 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 &= 0 \\ -1x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 &= 0 \\ -1x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 0x_8 &= 0 \\ -1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ -1x_1 + 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 + 2x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 &= 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 + 1x_7 + 1x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 &= 0 \end{aligned}$$

От осмо, десето, единадесето, дванадесето, тринадесето, четиринадесето, петнадесето и шестнадесето уравнение следва непосредствено, че:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0.$$

Наредената осморка числа $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ е решение на системата и при това единствено, тъй като всяко от числата $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ може да вземе само стойност 0.

Следователно осморката магически квадрати $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8)$ е линейно независима система.

3) Нека Δ , където

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & k \\ \hline a_{31} & l & m & n \\ \hline p & q & r & s \\ \hline \end{array}$$

е магически квадрат.

Като се използват дефиницията за умножение на число с числов квадрат, дефиницията за алгебричен сбор на числови квадрати и доказаните зависимости, може да се провери, че магическият квадрат Δ е линейна комбинация на $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$ с коефициенти, съответно k, l, m, n, p, q, r, s , т.е.

$$\Delta = k.\Delta_1 + l.\Delta_2 + m.\Delta_3 + n.\Delta_4 + p.\Delta_5 + q.\Delta_6 + r.\Delta_7 + s.\Delta_8.$$

С това доказателството на теоремата е завършено.

6. Построяване на магически квадрати от четвърти ред по предварително избрани осем от неговите елементи

От теоремата за векторното пространство на магическите квадрати и нейното доказателство следва, че при построяване на магически квадрат от четвърти ред съществуват осем елемента, които могат да бъдат избрани произволно. Също така беше показано как може да стане това, когато избраните елементи са: $a_{24}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$.

В следващото изложение ще бъдат построени магически квадрати от четвърти ред по дадени 8 от елементите (и техните места), различни от наредената осморка $(a_{24}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44})$.

Задача 1. Да се построи магически квадрат от четвърти ред по дадени елементите:

$$a_{11} = 1, a_{13} = 2, a_{22} = 3, a_{24} = 4, a_{31} = 5, a_{33} = 6, a_{42} = 7, a_{43} = 8.$$

Решение

Да въведем следните означения:

$$a_{12} = x, a_{14} = y, a_{21} = z, a_{23} = u, a_{32} = v, a_{34} = w, a_{41} = r, a_{44} = t.$$

На този етап търсеният квадрат Δ изглежда така:

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & x & 2 & y \\ \hline z & 3 & u & 4 \\ \hline 5 & v & 6 & w \\ \hline r & 7 & 8 & t \\ \hline \end{array}$$

Като вземем предвид зависимостите между дадените и неизвестните числа в Δ , достигаем до следната система от 9 уравнения с 8 неизвестни:

$$\begin{array}{l} 1 + x + 2 + y = z + 3 + u + 4 \\ 1 + x + 2 + y = 5 + v + 6 + w \\ 1 + x + 2 + y = r + 7 + 8 + t \\ 1 + x + 2 + y = 1 + z + 5 + r \\ 1 + x + 2 + y = x + 3 + v + 7 \\ 1 + x + 2 + y = 2 + u + 6 + 8 \\ 1 + x + 2 + y = y + 4 + w + t \\ 1 + x + 2 + y = 1 + 3 + 6 + t \\ 1 + x + 2 + y = y + u + v + r \end{array}$$

Привеждаме уравненията в нормален вид и представяме системата в матричен (табличен) вид – таблица 1.

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	1	-1	-1	0	0	0	0	4
(2)	1	1	0	0	-1	-1	0	0	8
(3)	1	1	0	0	0	0	-1	-1	12
(4)	1	1	-1	0	0	0	-1	0	3
(5)	0	1	0	0	-1	0	0	0	7
(6)	1	1	0	-1	0	0	0	0	13
(7)	1	0	0	0	0	-1	0	-1	1
(8)	1	1	0	0	0	0	0	-1	7
(9)	1	0	0	-1	-1	0	-1	0	-3

Таблица 1

Извършваме последователно елементарни преобразувания на матрицата (еквивалентни преобразувания на системата) по метода на Гаус – Жордан с цел да достигнем до „единична матрица“ в стълбовете на неизвестните.

След (19) елементарни преобразувания достигахме до таблица 2.

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	0	0	0	0	0	0	0	-7
(2)	0	0	0	0	0	0	0	1	0
(3)	0	0	0	0	1	0	0	0	7
(4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(5)	0	1	0	0	0	0	0	0	14
(6)	0	0	1	0	0	0	0	0	9
(7)	0	0	0	1	0	0	0	0	-6
(8)	0	0	0	0	0	0	1	0	-5
(9)	0	0	0	0	0	1	0	0	-8

Таблица 2

От таблица 2 става ясно, че системата има единствено решение:

$$x = -7; y = 14; z = 9; u = -6; v = 7; w = -8; r = -5; t = 0$$

Проверка:

$$\begin{aligned} 1 + x + 2 + y &= 1 - 7 + 2 + 14 = 10; z + 3 + u + 4 = 9 + 3 - 6 + 4 = 10; \\ 5 + v + 6 + w &= 5 + 7 + 6 - 8 = 10; r + 7 + 8 + t = -5 + 7 + 8 + 0 = 10; \\ 1 + z + 5 + r &= 1 + 9 + 5 - 5 = 10; x + 3 + v + 7 = -7 + 3 + 7 + 7 = 10; \\ 2 + u + 6 + 8 &= 2 - 6 + 6 + 8 = 10; y + 4 + w + t = 14 + 4 - 8 + 0 = 10; \\ 1 + 3 + 6 + t &= 1 + 3 + 6 + 0 = 10; y + u + v + r = 14 - 6 + 7 - 5 = 10. \end{aligned}$$

1	-7	2	14
9	3	-6	4
5	7	6	-8
-5	7	8	0

Отговор: $\Delta =$

Задача 2. Да се построи магически квадрат от четвърти ред по дадени елементи:

$$a_{11} = A, a_{13} = B, a_{22} = C, a_{24} = D, a_{31} = E, a_{33} = F, a_{42} = G, a_{44} = H.$$

Решение

Тъй като са известни елементите по главния диагонал, то е известно и характеристикното число S на търсения квадрат Δ , т.е. $S = A + C + F + H$.

Да въведем следните означения:

$$a_{12} = x, a_{14} = y, a_{21} = z, a_{23} = u, a_{32} = v, a_{34} = w, a_{41} = r, a_{43} = t.$$

На този етап квадратът Δ изглежда така:

$$\Delta = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{A} & x & \mathbf{B} & y \\ \hline z & \mathbf{C} & u & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E} & v & \mathbf{F} & w \\ \hline r & \mathbf{G} & t & \mathbf{H} \\ \hline \end{array}$$

Като вземем предвид зависимостите между дадените и неизвестните в Δ , достигаме до система от 9 уравнения с 8 неизвестни, поместени в таблица T_1 .

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	1	0	0	0	0	0	0	A_1
(2)	0	0	1	1	0	0	0	0	A_2
(3)	0	0	0	0	1	1	0	0	A_3
(4)	0	0	0	0	0	0	1	1	A_4
(5)	0	0	1	0	0	0	1	0	A_5
(6)	1	0	0	0	1	0	0	0	A_6
(7)	0	0	0	1	0	0	0	1	A_7
(8)	0	1	0	0	0	1	0	0	A_8
(9)	0	1	0	1	1	0	1	0	A_9

Таблица T_1

където:

$$\begin{aligned} A_1 &= -B + C + F + H; A_2 = A - D + F + H; A_3 = A + C - E + H; \\ A_4 &= A + C + F - G; A_5 = C - E + F + H; A_6 = A + F - G + H; \\ A_7 &= A - B + C + H; A_8 = A + C - D + F; A_9 = A + C + F + H. \end{aligned}$$

След (шест) елементарни преобразувания на матрицата (еквивалентни преобразувания на системата) по метода на Гаус – Жордан достигаме до таблица T_2 ,

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	0	0	0	1	0	0	0	D_1
(6)	0	1	0	0	-1	0	0	0	C_6
(3)	0	0	0	0	1	1	0	0	A_3
(4)	0	0	0	0	0	0	1	1	A_4
(5)	0	0	1	0	0	0	1	0	A_5
(2)	0	0	1	1	0	0	0	0	A_2
(7)	0	0	0	1	0	0	0	1	A_7
(8)	0	0	0	0	1	1	0	0	D_8
(9)	0	0	0	1	2	0	1	0	D_9

Таблица T_2

където:

$$D_1 = A + F - G + H; E_6 = A - C - D + E; D_8 = 2A + B - D + F - G;$$

$$D_9 = 2A + B - G + F + H.$$

От таблица T_2 се вижда, че когато $D_8 \neq A_3$, системата няма решение.

Нека $D_8 = A_3$, т.е.

$$A + B + E + F = C + D + G + H$$

След още (3) елементарни преобразувания на матрицата (по метода на Гаус – Жордан) достигаме до таблица T_3 .

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	0	0	0	1	0	0	0	D_1
(6)	0	1	0	0	-1	0	0	0	C_6
(3)	0	0	0	0	1	1	0	0	A_3
(4)	0	0	0	0	0	0	1	1	A_4
(5)	0	0	1	0	0	0	1	0	A_5
(2)	0	0	0	1	0	0	-1	0	E_6
(7)	0	0	0	0	0	0	1	1	F_7
(9)	0	0	0	0	2	0	2	0	F_9

Таблица T_3

където:

$$E_6 = A - C - D + E; F_7 = -B + 2C + D - E + H; F_9 = A + B + C + D - E + F - G + H.$$

От таблица T_3 се вижда, че когато $A_4 \neq F_7$, системата няма решение.

Нека $A_4 = F_7$, т.е.

$$A + B + E + F = C + D + G + H$$

(Нека отбележим, че до това условие достигаме за втори път.)

След още еквивалентни преобразувания на системата (по метода на Гаус – Жордан) достигаме до таблица T_4 .

	x	y	z	u	v	w	r	t	
(1)	1	0	0	0	0	0	0	J_1	-1
(6)	0	1	0	0	0	0	0	J_2	+1
(3)	0	0	0	0	1	0	0	J_3	+1
(4)	0	0	0	0	0	0	1	A_4	-1
(5)	0	0	1	0	0	0	0	H_5	+1
(2)	0	0	0	1	0	0	0	H_6	-1
(9)	0	0	0	0	0	1	0	L_7	-1

Таблица T_4

където:

$$J_1 = \frac{1}{2}(3A - B + C - D + E + 3F - 3G + H);$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(-3A - B + C + D - E - F + H + 3G);$$

$$J_3 = \frac{1}{2}(-A + B - C + D - E - F + G + H);$$

$$H_5 = -A - E + G + H;$$

$$H_6 = 2A - D + E + F - G;$$

$$I_7 = \frac{1}{2}(3A - B + 3C - D - E + F - G + H).$$

Следователно:

$$x = J_1 - t = \frac{1}{2}(3A - B + C - D + E + 3F - 3G + H) - t;$$

$$y = J_2 + t = \frac{1}{2}(-3A - B + C + D - E - F + H + 3G) + t;$$

$$z = H_5 + t = -A - E + G + H + t;$$

$$u = H_6 - t = 2A - D + E + F - G - t;$$

$$v = J_3 + t = \frac{1}{2}(-A + B - C + D - E - F + G + H) + t;$$

$$w = I_7 - t = \frac{1}{2}(3A - B + 3C - D - E + F - G + H) - t;$$

$$r = A_4 - t = A + C + F - G - t;$$

t – параметър.

Проверка:

$$\underline{A + x + B + y} = A + \frac{1}{2}(-3A + B - 5C + D + 3E + F - G - H) - t +$$

$$+ B + \frac{1}{2}(3A - 3B + 7C - D - 3E + F + G + 3H) + t =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{z + C + u + D} = -A - E + G + H + t + C + 2A - D + E + F - G - t + D =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{E + v + F + w} = E + \frac{1}{2}(5A - B + 5C - D - 3E + F - G + 3H) + F +$$

$$+ \frac{1}{2}(-3A + B - 3C + D + E - F + G - H) + t =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{r + G + t + H} = A + C + F - G - t + G + t + H = A + C + F + H = S$$

$$\underline{A + z + E + r} = A - A - E + G + H + t + E + A + C + F - G - t =$$

$$= A + C + F + H = S$$

$$\underline{x + C + v + G} = \frac{1}{2}(-3A + B - 5C + D + 3E + F - G - H) - t + C +$$

$$+ \frac{1}{2}(5A - B + 5C - D - 3E + F - G + 3H) + t + G =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{B + u + F + t} = B + 2A - D + E + F - G - t + F + t =$$

$$= A + C + F + H + A + B - C - D + E - G + F - H =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{y + D + w + H} = \frac{1}{2}(3A - 3B + 7C - D - 3E + F + G + 3H) + t + D +$$

$$+ \frac{1}{2}(-3A + B - 3C + D + E - F + G - H) - t + H =$$

$$= -B + 2C + D - E + G + 2H = A + C + F + H - A - B + C + D - E + G - F + H =$$

$$= A + C + F + H = S;$$

$$\underline{y + u + v + r} = \frac{1}{2}(-3A - B + C + D - E - F + H + 3G) + t + 2A - D + E + F - G - t +$$

$$+ \frac{1}{2}(-A + B - C + D - E - F + G + H) + t + A + C + F - G - t =$$

$$= \frac{1}{2}(-3A - B + C + D - E - F + H + 3G) + \frac{1}{2}(-A + B - C + D - E - F + G + H) +$$

$$+ 2A - D + E + F - G + A + C + F - G =$$

$$= -2A + D - E - F + 2G + H + 2A - D + E + F - G + A + C + F - G =$$

$$= A + C + F + H = S.$$

Изводи

1) Ако $A + B + E + F \neq C + D + G + H$, то задачата няма решение, т.е. не съществува магически квадрат.

2) Ако $A + B + E + F = C + D + G + H$, то задачата има безброй много решения, зависещи от един параметър, т.е. съществуват безброй много магически квадрати.

5. Вместо заключение

Тази работа може да се разглежда като продължение на предишно изследване (Lalchev, Varbanova, Stoimirov, Voutova, (2020) за векторното пространство на магическите квадрати от трети ред, в която чрез директно доказателство беше потвърдено, че размерността на това пространство е числото 3. Накрая ще кажем и това, че за да се намали обемът на публикацията, значителна част от алгебричните преобразувания в изследването са пропуснати, като са дадени указания за тяхното допълване при желание от страна на читателя.

ЛИТЕРАТУРА

- Болл, У. & Коксетер, Г. (1986). *Математически есе и развлечения*. Москва: Мир.
- Дочев, К. & Димитров, Д. (1973). *Линейна алгебра*. София: Наука и изкуство.
- Кордемски, Б. (1964). *Математическа досетливост*. София: Народна просвета.

- Лалчев, З., Върбанова, М., Стоимиров, М., & Вутова, И. (2020). За векторното пространство на магическите квадрати от трети ред (в занимателната математика). *Математика и информатика*, 63 (2), 115 – 129.
- Ward III, J., (1980). Векторни пространства от магически квадрати. Сп. Математика, кн. 53, № 2 (март, 1980), стр. 108 - 111.

REFERENCES

- Ball, W. & Coxeter, H. (1986). *Mathematical Recreations and Essays*. Moskva: Mir.
- Dochev, K. & Dimitrov, D. (1973). *Lineyna algebra*. Sofia: Nauka i izkustvo.
- Kordemski, B. (1964). *Matematicheska dosetlivost*. Sofia: Narodna prosveta.
- Lalchev, Z. Varbanova, M., Stoimirov, M. & Voutova, I. (2020). Za vectornoto prostranstvo na magicheskite kvadrati ot chetvarti red (v zanimatelnata matematika). *Matematika i informatika*, 63 (2) 115 – 129.
- Ward III, J., (1980). *Vector Spaces of Magic Squares*. Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1980), pp. 108 – 111.

ABOUT THE VECTOR SPACE OF THE FOURTH ORDER MAGIC SQUARES (IN RECREATIONAL MATHEMATICS)

Abstract. In the present study a more general (than the traditional) definition of the term magic squares of the fourth order is adopted and sufficient conditions for their existence are indicated. Essential vector-algebraic properties of the fourth-order magic squares have been studied by elementary means of linear algebra. A direct proof of the theorem for the dimensionality of their vector space is made, without using the more general theorem for the dimensionality of the vector space of the magic squares of order n ($n \geq 3$). By solving a linear system of 10 linear equations with 17 unknowns, it is shown that when compiling a fourth-order magic square (in the general case), eight (of the sixteen) coordinates can be given arbitrarily. There are two formulated and solved problems which corroborate the propositional. The present paper is meant for some lessons in recreational mathematics.

Keywords: magic squares; vector space; Gauss – Jordan elimination; recreational mathematics

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Dr. Irina Voutova, Assist. Prof.**
Researcher ID: AAD-495-2020
Department of Education in Mathematics and Informatics
University of Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: irinaz@abv.bg