Educational Matters
Научно-методически статии

ЗА ПРОСТИТЕ ЧИСЛА

[1)]Сава Гроздев, Веселин Ненков
[1)]Висше училище по застраховане и финанси – София

Резюме. Разгледани са някои от основните хипотези за простите числа, които определят техни важни за математиката свойства.

Keywords: prime number; perfect number; Mersenne prime number; twin prime numbers; hypothesis

По време на Световния конгрес на математиците през 1912 г. в Кеймбридж, Англия, немският математик Едмунд Ландау (1877 – 1938) формулира 4 основни проблема относно простите числа, характеризирани от докладчика като „невъзможни да бъдат атакувани при съвременното състояние на математиката“. Към днешна дата, повече от 100 години след доклада на Ландау пред делегатите на конгреса, *проблемите на Ландау*, както са известни в математиката, продължават да бъдат нерешени. Става дума за:

1. хипотезата на Голдбах (за Голдбах ще стане дума по-нататък), че всяко четно естествено число, по-голямо от 2, е сбор на две прости числа;

2. хипотезата за простите числа близнаци, че съществуват безброй много прости числа p, за които числото $p + 2$ е също просто;

3. хипотезата на Лежандър (Андре-Мари Льожандър (1752 – 1833) е френски математик), че между всеки две последователни съвършени числа съществува поне едно просто число;

4. хипотезата, че съществуват безброй много прости числа p, за които числото $p - 1$ е точен квадрат, т.е. че съществуват безброй много прости числа от вида $n^2 + 1$.

Основно настоящата статия е посветена на втория проблем на Ландау.

Английският математик Годфри Харди (1877 – 1947) е защитник на тезата, че качествена математика се прави от млади умове. В книгата си (Hardy, 2004), която се счита за едно от най-добрите описания на прозренията на един действащ математик, предназначено за непрофесионалисти, той пише: „Не познавам голямо постижение в математиката, което да е дело на човек, преминал петдесетте“. Разбира се, подобно твърдение може да се приеме и като проява на скромност от страна на Харди за качествата на книгата му, която той публикува през 1940 г. на 62-годишна възраст. По-нататък авторът продължава: „Ако човек на зряла възраст загуби интерес към математиката и се отдалечи от нея, това едва ли е голяма загуба за матема-

тиката и за самия него“. Изключение от подобно твърдение със сигурност е свързано с родения в Китай през 1955 г. американски математик Уитанг Занг (Yitang Zhang). В продължение на десетина години след завършване на докторската си дисертация въпросният Занг даже не работел като математик, а като счетоводител в щата Кентъки. Той напуснал службата си, която заемал в един ресторант за бързо хранене в станция на метрото, и станал преподавател в Университета в щата Ню Хемпшир. През 2013 г., когато е на 57 години, Занг анонсира изключително важно математическо откритие в (Yitang, 2014). През следващата година публикацията в цитираното първокласно списание му носи една от най-престижните награди в математиката – тази на фондация „МакАртър“ (625 хил.щ. долара), а така също и професорска позиция в Калифорнийския университет в Санта Барбара. Публикацията на Уитанг Занг е свързана с т.нар. „хипотеза за простите числа близнаци“, която е с около 200-годишна история. Занг не доказва хипотезата, но прави значителна стъпка към потвърждаването ѝ. И макар че оттогава нещата не са отишли много далеч, откритието му вдъхновява получаването на обещаващи резултати и нови прозрения в областта на простите числа. Постижението на Уитанг Занг се отнася до първата крайна оценка за разликата между две последователни прости числа.

Просто число е такова естествено число $n > 1$, което се дели само на числото 1 и на себе си. Прости са числата 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, … и т.н. Те са с важно приложение в съвременната криптография и са свързани например със сигурността на кредитните ни карти. Но истинската роля, която играят, е в областта на теорията на числата, в тази част от математиката, която е посветена на целите числа. Простите числа са градивните елементи на числата, защото всяко естествено число, по силата на основната теорема на аритметиката, може да се представи по единствен начин като произведение на прости числа и техните степени. Известният английски математик Джеймс Мейнард (р. 1987 г.) от Оксфордския университет в Англия, който дава ново доказателство на теоремата на споменатия Уитанг Занг, казва: „Същата идея съществува и в химията. За да изучите свойствата на някое сложно съединение, следва да разберете от кои атоми е съставено то и как тези атоми са свързани помежду си“. Основната теорема на аритметиката гласи: всяко естествено число $n > 1$ може да се представи по единствен начин във вида $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$, където $p_1, p_2, ..., p_m$ са всички прости делители на *n*, а $k_1, k_2, ..., k_m$ са съответните им кратности.

Интересът към простите числа датира от времето на древните гърци. В своите *Елементи* Евклид (III – IV в.пр.н.е.) дава едно красиво доказателство на факта, че простите числа са безброй много. Ето това доказателство. Да допуснем, че простите числа са краен брой, и да означим техния брой с *n*. Нека самите прости числа са $p_1, p_2, ..., p_n$. Да разгледаме числото $q = p_1.p_2. ... p_n + 1$. Ясно е, че остатъкът при деление на *q* с кое да е просто число от списъка, е равен на 1, т.е. *q* не се дели на никое просто число. Следователно *q* е просто и това е противоречие.

От факта, че простите числа са безброй много, следва, че не съществува най-голямо просто число. Проблемите се появяват, когато искаме да разберем как са разпределени простите числа върху числовата права. В края на XIX век френският математик Жак Адамар (1865 – 1963) и белгийският математик Шарл Пусен (1866 – 1962) (когото кралят на Белгия удостоява с титлата барон) независимо един от друг доказват т.нар. теорема за простите числа, която дава оценка за броя на простите числа, които са по-малки от предварително зададено число. Тази теорема е свързана с информация за осредненото разпределение на простите числа по числовата права, което наподобява разпределението на простите числа до 100. Например първите прости числа са 2, 3 и 5, които са близо едно до друго. Разстоянието между двете най-големи прости числа до 100, т.е. между 89 и 97, е значително по-голямо. След 100 обаче са простите числа 101, 103, 107 и 109, които са отново близо едно до друго. И макар че разпределението на по-големите прости числа е с по-големи разстояния между тях, в осреднен смисъл се оказва, че съседните прости числа, които са близо едно до друго, са много. В това се състои интуитивната същност на теоремата на Уитанг Занг. И точно тук идва хипотезата за простите числа близнаци. С изключение на 2 и 3, които са едно до друго, няма друга двойка прости числа, които се различават с 1. Причината е, че 2 е единственото четно просто число. За сметка на това примерите на съседни прости числа, които се различават с 2, са много: 3 и 5, 17 и 19, 41 и 43, …., 107 и 109, и т.н. Такива прости числа се наричат *прости числа близнаци*.

Хипотезата за простите числа близнаци гласи, че те са безброй много. След като простите числа са безброй много, естествено е да се очаква, че и близнаците са безброй много. Съществуват сериозни основания за това. Едно от важните е, че с помощта на компютри са намерени доста големи прости числа близнаци, при това значителен брой. Въпросът е дали компютърът е успял да открие най-голямата двойка. Съмненията се засилват от наличието на модел за формулиране на съдържателни хипотези относно броя на двойките близнаци, които се намират до дадена точка от числовата права. В същото време, тази точка може да се фиксира произволно далеч. Всичко това обаче е недостатъчно за потвърждаване на хипотезата за простите числа близнаци, защото математиците се нуждаят от неопровержимо доказателство, т.е. от математическо доказателство, което да не поражда съмнения, както доказателството на Евклид за безкрайния брой на простите числа не допуска каквато и да е мисъл за противното. За съжаление, такова доказателство все още липсва.

Всъщност през 2013 г. Уитанг Занг доказа, че съществуват безброй много двойки съседни прости числа, разстоянията между които са по-малки от 70 милиона. На пръв поглед, 2 и 70 милиона са несравними, но 70 милиона е крайно число и затова теоремата на Занг е важна. „Самият факт, че е получено някакво число, е необикновен – споделя английският математик Ендрю Гранвил (р. 1962 г.) от Университета в Монреал и Унивърсити колидж в Лондон, който е специалист по тео-

рия на числата. – Много хора са се опитвали и не са успявали. Изобщо не вярвах, че това е възможно да се случи.“

Макар че оценката е подобрена, за което ще стане дума по-долу, до този момент сериозен напредък за доказване на хипотезата за простите числа близнаци не е направен. Постижението на Уитанг Занг е значимо и по друга причина. В доказателството си Занг използва подход, който много математици пренебрегват. Става дума за т.нар. „метод на решето“, който датира от времето на древногръцкия математик Ератостен (276 г.пр.н.е. – 195 г.пр.н.е.). За да отдели простите числа от останалите, Ератостен методично задрасквал всички естествени числа от 1 нататък, които не са прости. Например, за да отделим простите числа, които са по-малки от 100, тръгваме от простото число 2 (преди това сме задраскали 1, което не е просто по дефиниция) и задраскваме всички числа, които се делят на 2, т.е. всяко второ число. Първото число след 2, което остава незадраскано, е 3 и следователно то е просто. По-нататък задраскваме всички числа, които се делят на 3, т.е. всяко трето число от незадрасканите. Първото незадраскано число след 3 е 5 и следователно 5 е просто. Продължаваме по същия начин до изчерпване на списъка. Остават незадрасканите числа, които са простите числа от 1 до 100. В този случай решето се нарича „решето на Ератостен“.

Методът на решето е ръчен метод и предизвиква отегчение, но все пак е работещ. Подобна идея в по-съвършен вид използва и Уитанг Занг в доказателството на своята теорема. Методът на решето е усъвършенстван в различни посоки. Така, преди десетина години (преди анонса на Уитанг Занг) американският математик Даниел Голдстън (р. 1954 г.), унгарският математик Януш Пинтс (р. 1950 г.) и турският математик Цем Уилдирим (р. 1961 г.) използват модифицирана версия на метода на решето (различна от тази на Уитанг Занг) и получават резултат, който, базиран на хипотезата на Елиот – Халберстам (Питър Елиот, р. 1941 г., е американски математик, а Хейни Халберстам, 1926 – 2014, е английски математик), подобрява резултата на Уитанг Занг от 70 милиона на 16. Тук сме свидетели на подход, който е доста често срещан в математиката – от една хипотеза се отива към друга, от верността на която следва придвижване на първата. Междупрочем по подобен начин Ендрю Уайлс (Grozdev & Nenkov, 2016) атакува Великата теорема на Ферма, при доказателството на която потвърждава хипотезата на Танияма – Шимура (Grozdev & Nenkov, 2016). Да отбележим изрично, че резултатът на Уитанг Занг е чист и не се позовава на друга хипотеза, т.е. не се позовава на недоказани твърдения.

Веднага след анонса на Уитанг Занг се появиха опити да се вникне в подхода на автора. Оказа се, че границата 70 милиона не е най-добрата, до която може да се стигне с използваните от Занг аргументи. Онлайн беше стартирано т.нар. „Полимат“ сътрудничество, инициатор на което е австралийският доцент по математика Скот Морисън (р. 1982 г.) от Австралийския национален университет. Един от първите, които се включиха в инициативата, е вероятно най-гениалният математик

на нашето време – носителят на милиондоларовата награда на Института Клей и Фийлдсов лауреат, известният американски математик с австралийско-китайски произход Теренс Тао (р. 1975 г.) от Калифорнийския университет в Лос Анджелис. Идеята на проекта „Полимат“ е да се работи публично върху нерешени проблеми чрез интернет. Само след няколко месеца беше доказано, че съществуват безброй много двойки последователни прости числа, разликите между които не надминават 4680. Така от 70 милиона се стигна до 4680.

Всичко възможно от подхода на Уитанг Занг беше „изстискано“ и прогресът по проекта замря. Появи се необходимост от нови „оръжия“. Споменатият в началото Джеймс Мейнард предложи да се използват т.нар. прости дупки. Става дума за следното: ако p_n и p_{n+1} са последователни прости числа, то разликата $g_n = p_{n+1} - p_n$ се нарича *n*-та проста дупка. Пак чрез метода на решето, и по-точно с използване на подобрена версия на подхода на Голдстън – Пинтс – Уилдирим (вж. по-горе), но вече приложена към прости дупки, Мейнард подобри оценката до 600. Той успя да реши и „най-скъпата“ задача, поставена от унгарския математик Пол-Ердьош (1913 – 1996) и свързана с теоремата на шотландския математик Робърт Ранкин (1915 – 2001) от 1936 г., която гласи, че съществува такава константа $c > 0$, че за безброй много стойности на *n* е изпълнено неравенството

$$g_n > \frac{c \log n \log\log n \log\log\log\log n}{(\log\log\log n)^2}.$$

Задачата на Ердьош е да се потвърди или опровергае твърдението, че константата *c* може да се вземе произволно голяма. През 2014 г. Мейнард решава положително задачата на Ердьош (независимо от него, но малко по-късно, задачата е решена и от Кевин Форд, Бен Грийн, Сергей Конягин и Теренс Тао) и получава определената от екстравагантния унгарец награда в размер на 10 хил. щ. долара. Освен със значимите си резултати и големия брой публикации, който го доближава до изключителната продуктивност на Леонард Ойлер, Пол Ердьош е известен и с това, че обявявал парични награди за успешното решаване на трудни математически задачи – колкото по-трудна била една задача, толкова по-голяма била паричната награда за нея.

През м. април 2014 г. проектът „Полимат“ бил възобновен и с помощта на новия метод на Мейнард оценката 600 била подобрена до 246. Засега всичко свършва дотук. Пътят от 246 до 2 е доста по-кратък в сравнение с пътя от 70 милиона до 246, но трудността да се извърви този път, е обратно пропорционална на дължината му, и то с порядъци. Проблемът е в дефиницията на простите числа и начина, по който методът на решето работи. От една страна, простото число притежава само един делител (себе си), а от друга – методът на решето губи ефективност, когато се прилага за числа с нечетен брой прости делители. „Случаят наподобява радара, който засича нарушителя, но заедно с него и голям брой неправилно заподозрени – казва Джеймс Майнард. „Не е възможно да различиш „сигналите“,

които се отнасят до простите числа, от тези, които са свързани с числа, „приличащи“ на прости, но притежаващи два или четири прости делителя“, продължава Мейнард. Сблъскваме се с т.нар. проблем за четността, за решаването на който все още не е открит подходящ подход. Все пак Мейнард споделя оптимистичното си усещане за краен успех, което се основава на неотдавнашно откритие: осредненото поведение на числата върху далечни интервали от числовата права се поддава на модели за по-близки до началото. Тази идея е доста стара и е била считана за изключително трудно реализуема, дори невъзможна. Но през 2015 г. финландската математичка Кайса Матомаки (р. 1985 г.) от Университета в Турку, Финландия, и канадският математик с руски произход Максим Раджиуил (р. 1988 г.) от Университета МакЖил в Монреал доказаха именно това. „Те установиха – казва Джеймс Мейнард, – че почти винаги, когато някой интервал от числовата права се „пренесе“ назад към началото, се получават числа с четен брой прости делители и числа с нечетен брой прости делители. Това е един технически резултат, който е много вълнуващ за нас, защото получаващите се по този начин „гайки“ и „болтове“ могат да се използват в други области.“ Да отбележим, че по този начин Теренс Тао успя да потвърди хипотезата на Чоула (Сарвадаман Чоула, 1907 – 1995, е индийски математик, роден в Англия), известна като „бебешки вариант“ на хипотезата за простите числа близнаци и появила се като преходен етап в доказването на оригиналната хипотеза. Тао разглежда редицата $1\times 3,\ 2\times 4,\ 3\times 5,\ 4\times 6,\ 5\times 7,\ \ldots$ и показва, че вероятността една число в тази редица да има нечетен брой прости делители, е равна на вероятността това число да има четен брой прости делители. Примерът е свързан с проблема за четността в термините на вероятностите. Нито един от тези резултати не е пряко свързан с хипотезата за простите числа близнаци. Макар че е бил шокиран от резултата на Матомаки и Раджиуил, споменатият по-горе Ендрю Гранвил не е убеден, че той (резултатът) ще помогне в потвърждаването на хипотезата за простите числа близнаци. „Изобщо не е ясно как би могло да стане това“, споделя Гранвил. За разлика от него Джеймс Мейнард е оптимист. „Всякакви резултати относно проблема за четността са добре дошли“, казва той. Различните мнения са повод да се смята, че краен успех не е реално да се очаква преди появата на звезда от рода на Уитанг Занг. Отново се сблъскваме с обстоятелство, типично за развитието на математиката – прогресът е бавен, докато не се появи някое зашеметяващо откритие.

През м. май 2016 г. се появи онлайн публикацията arXiv:1603.03720v4, в която се съобщава, че е открито ново, по-рано незабелязано свойство на простите числа. Автори на анонса са индийският математик Канан Саундарараджан (р. 1974 г.) от Станфордския университет в Калифорния и американският математик Робърт Лемке Оливър (р. 1987 г.) от Университета Тъфтс в гр. Медфорд, щата Масачузетс. Става дума за следното. Ясно е, че освен 2 и 5 всички прости числа завършват на 1, 3, 7 или 9. Ако последната цифра на едно просто число се появява случайно, както се очаква, то не следва да има значение каква е последната цифра на пре-

дходното просто число. Всяка една от четирите възможности 1, 3, 7 или 9 трябва да има 25% шанс да се появи в края му. Оказва се, че не е така. Проверявайки с помощта на компютър първия един милиард известни прости числа, двамата математици забелязали, че тези, които завършват на 1, са последвани от просто число с единица в края само в 18,5% от случаите – факт, който не би се получил, ако простите числа бяха разпределени случайно. Простите числа, завършващи на 3 или 7, последвани от просто число с единица в края, са по 30%, докато простите числа, които завършват на 9, са последвани от прости числа с единица в края в 22% от случаите. Проверката установява също, че вероятността след просто число, завършващо на 9, да следва число, завършващо на 1, е с 65% по-голяма от вероятността след него да следва число, отново завършващо на 9. Излиза, че простите числа не са разпределени съвсем случайно. „Беше много странно – споделя Саундарараджан в английското сп. *New Scientist*. – Имаш чувството, че притежаваш картина, която познаваш отлично, но в един момент осъзнаваш, че има фигура от нея, която никога не си виждал преди това.“ Въз основа на наблюденията Саундарараджан и Лемке Оливър създават модел (Lemke Oliver & Soundararajan, 2017), който описва поведението на окончанията на простите числа. Подобни модели се появяват и за комбинации от окончания. Те по аналогичен начин се отклоняват от очакваните произволни стойности. Тази закономерност е проверена и при други бройни системи, различни от десетичната. Оказва се, че и там е същото. Това означава, че закономерностите в моделите не са в резултат на десетичната бройна система, а описват присъщо свойство на самите прости числа. Моделите обаче губят устойчивост при нарастване на числата. Саундарараджан и Лемке Оливър, заедно със свои сътрудници, са разработили компютърна програма за продължаване на изследванията сред първите 400 милиарда прости числа. Моделът им продължава да работи, но и тук той бавно намалява устойчивостта си с увеличаване големината на числата. Двамата учени смятат, че продължавайки до безкрайност, простите числа ще стигнат до случайно разпределение, което математиците са свикнали да очакват и за други задачи.

Саундарараджан разказва пред *Quanta magazine*, че идеята за проверка на случайността на простите числа му хрумнала по време на лекция на американския математик с японски произход Токиеда Тадаши (р. 1967 г.) от Станфордския университет в САЩ. Лекторът обърнал внимание на следния пример от теорията на вероятностите. Ако Алис реши да хвърля монета, докато не получи тура, последвана от ези, а Боб – дотогава, докато не получи два пъти поред ези, то на Алис, ще ѝ трябват средно 4 хвърляния на монетата, докато на Боб – съответно 6. При това вероятността да се падне ези или тура, е една и съща. Саундарараджан и Лемке Оливър намират обяснение на този факт, основавайки се на друга известна хипотеза, която ще бъде обсъдена в друга публикация. Хипотезата е свързана с имената на споменатия в началото Годфри Харди и английския математик Джон Литълууд (1885 – 1977). Тя описва по-точно разпределението на двойки, тройки и

по-големи групи прости числа, отколкото основното очакване, че простите числа са равномерно разпределени. Засега не е ясно дали откритието на Саундарараджан и Лемке Оливър е изолирано явление, или е свързано с по-дълбоки свойства на простите числа. Дори то да няма някакви непосредствени приложения в математиката, както казва Ендрю Гранвил: „Ако това, което приемаме за даденост, излезе погрешно, следва да преосмислим обясненията и на други факти, които знаем“.

Хипотези, проблеми на Ландау, пак хипотези и нови хипотези – това е пътят за развитие на съвременната математика. Ето още някои подробности.

Хипотеза на Голдбах от 1742 г. (Кристиан Голдбах, 1690 – 1764, е немски математик). Всяко четно число, по-голямо от 2, може да се представи като сбор на две прости числа. Например $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7$, $12=5+7$, $14=3+11=7+7$, …, $78=31+47$, … Хипотезата е недоказана. До 2014 г. тя е потвърдена за всички числа до 4.10^{18}. Това, което е известно още, е, че всяко четно число може да се представи като сума на шест прости числа, но от 6 до 2…..?

Хипотеза на Жермен (Софи Жермен, 1776 – 1831, е френска математичка). Едно просто число се нарича просто число на Жермен, ако след удвояването му и прибавяне на 1 се получава отново просто число. Например 7 е просто число на Жермен, защото $7=2.3+1$ и 3 е просто. 11 е също просто число на Жермен, защото $11=2.5+1$ и 5 е просто. Друг пример е 59, защото $59=2.29+1$ и 29 е просто число. Хипотезата е, че простите числа на Жермен са безброй много, което също е все още недоказано.

Хипотеза на Риман от 1859 г. (Бернхард Риман, 1826 – 1866, е немски математик, ученик на великия Карл Фридрих Гаус). Ето как изглежда т. нар. Риманова дзета функция: $\zeta(z)=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+...$, където $z=x+iy$ е комплексно число. Тя се дефинира с горния ред на Дирихле, който е сходящ при $x>1$. Функцията е аналитична и притежава аналитично продължение в цялата комплексна равнина с изключение на $z=1$. Анулира се за всяко четно отрицателно цяло число, т.е.

$$0=\zeta(-2)=\zeta(-4)=\zeta(-6)=...$$

Всички тези нули се наричат *тривиални нули*. Доказано е, че останалите нули (наречени *нетривиални*) са разположени в ивицата $0\le x\le 1$ симетрично относно т.нар. *критична права линия* $x=\frac{1}{2}$. Хипотезата на Риман гласи, че всички нетривиални нули на Римановата дзета функция са разположени по тази права. Потвърждаването на хипотезата ще изясни много неща около разпределението на прости-

те числа. Връзката между Римановата взета функция и простите числа се дава с тъждеството на Ойлер $\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-z}}$, в което безкрайното произведение е взето по всички прости числа. Хипотезата на Риман е сред 7-те хипотези на XXI век, за решаването на всяка от които Институтът Клей е обявил награда от 1 млн. щ. долара (досега е доказана само хипотезата на Поанкаре).

Наскоро, на 26 декември 2017 г., бе обявено, че компютрите в Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) (Голямото търсене в интернет на Мерсенови прости числа) в резултат на усилена работа са открили най-голямото известно досега просто число $2^{77\,232\,971}-1$. Да се запише това число при основа 10, е невъзможно, защото дължината му е с повече от 23 милиона цифри и компресиран, текстовият файл с неговия десетичен запис ще бъде с обем 10 мегабайта. Новото математическо „чудовище" е открито от един от участниците в GIMPS – американския инженер Джонатан Пейс (р. 1968 г.). Предишното най-голямо просто число е $2^{74\,207\,281}-1$, което подобрява още по-предишния рекорд с близо 5 милиона цифри. Това пък математическо „чудовище" е открито от американския професор (в пенсия) по компютърни науки Къртис Купър от Университета на Централен Мисури в гр. Варенсбург, щата Мисури, отново в рамките на проекта GIMPS. Този проект обединява доброволци, които получават безплатен софтуер за търсене на Мерсенови прости числа. Инициатор на проекта е американският компютърен специалист Джордж Уолтмен (р. 1957 г.). Числото $2^{74\,207\,281}-1$ има 22 338 618 цифри. Купър го открива на 17 септември 2015 г., но заради заразяване на софтуера той успява да направи анонса няколко месеца по-късно. Купър е автор и на по-предишното най-голямо просто число $2^{57\,885\,161}-1$, за което съобщава през м. февруари 2013 г. Това число е с повече от 17 млн цифри. За всяко от двете постижения Къртис Купър получава награда от GIMPS в размер на по 3000 щ. долара. От 2009 г. е актуална обявената от GIMPS награда от 100 000 щ. долара за онзи, който пръв намери просто число с поне 10 млн. цифри.

Събития като горните бяха доста чести преди. През първите 8 години на настоящото хилядолетие рекордът е бил чупен седем пъти, но през последните 9 години са добавени само трима рекордьори. Всички прости числа по проекта GIMPS са Мерсенови прости числа, т.е. числа от вида $2^p - 1$, където p е също просто. Такива са например $31 = 2^5 - 1$ и $127 = 2^7 - 1$. До днес са известни само 50 Мерсенови числа, като последните 16 са открити по проекта GIMPS. Числата се наричат така по името на френския математик и богослов Мерен Мерсен (1588 – 1648).

Най-новото просто число е толкова голямо, че бяха необходими шест дни, за да се провери, че то няма други делители освен себе си. Едва след проверката GIMPS обяви, че е открито най-голямото досега просто число, което е 50-ото известно досега Мерсеново просто число. Мерсеновите прости числа вълнуват теоретиците,

защото те могат да се използват за генериране на т.нар. „съвършени числа“, т.е. такива, които са равни на сбора на всички свои собствени (т.е. без самото число) делители, включително и единицата. Съвършени числа са например 6 и 28, защото $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Следващите (подредени по големина) са 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056 и т.н. В своите *Елементи* Евклид използва формулата $2^{n-1}(2^n - 1)$, където $2^n - 1$ е просто, за пресмятане на първите четири съвършени числа. Така при $n = 2$ получаваме $2^1(2^2 - 1) = 2.3 = 6$, при $n = 3$ имаме $2^2(2^3 - 1) = 4.7 = 28$, при $n = 5$ получаваме $2^4(2^5 - 1) = 16.31 = 496$, а при $n = 7$ имаме $2^6(2^7 - 1) = 64.127 = 8128$. Петото съвършено число е открито преди 1461 г. неизвестно от кого, докато следващите две са постижения на италианския математик Пиетро Каталди (1548 – 1626) през 1588 г. Идва ред на Ойлер, който през 1722 г. открива осмото поред съвършено число. Деветото хронологично, но не и по големина, е открито от френския математик Едуард Лукà (1842 – 1891) през 1876 г. Лукà открива 12-ото по големина съвършено число. След него през 1883 г. руският свещеник и математик Иван Первушин (1827 – 1900) открива деветото по големина, а десетото и единадесетото по големина са открити от американския математик аматьор Ралф Пауърс (1875 – 1952) съответно през 1911 г. и 1914 г. (Powers, 1911).

Разбира се, за да бъде числото $2^n - 1$ просто, очевидно трябва и n да е просто. Да отбележим, че обратното не е вярно. Така числото 11 е просто, но $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ е съставно. През XVIII в. великият Леонард Ойлер доказва, че с помощта на формулата на Евклид се получават всички четни съвършени числа. По този начин Ойлер установява взаимно еднозначно съответствие между съвършените числа и Мерсеновите прости числа. Резултатът е известен в математиката като теорема на Евклид – Ойлер. След като до момента са познати 50 Мерсенови прости числа, то до момента са познати и 50 съвършени числа. Всички те са четни. Не е известно дали съществуват нечетни съвършени числа.

Някои биха запитали дали този стремеж към все по-големи числа не е само загуба на време и на огромна изчислителна мощност. Истината е, че търсенето на големи прости числа не е само математически еквивалент на изкачването на все по-високи планини. То (но не само то) тласка компютрите и развитието на софтуера до достигане границите на възможностите на техниката. Освен това търсеното стимулира съпътстващи дейности по същия начин, както например космическата надпревара доведе до създаването на нови технологии. Нещо повече, както вече беше отбелязано, изучаването на простите числа е важно за криптографията, а откриването на големи прости числа подпомага тестването на теориите за тяхното разпределение, което един ден, без съмнение, ще се окаже полезно.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Hardy, G. H. (2004). *A Mathematician's Apology*. Cambridge: University Press (ново издание ISBN 978-0-521-42706-7).

Zhang, Y. (2014). Bounded gaps between primes, *Annals of Mathematics*, 179 *(3)*. Princeton: Princeton University and the Institute for Advanced Study. (received on 16 August 2013 г.).

Grozdev, S. & V. Nenkov (2016). Abel prize for 2016, *Mathematics plus*, *(24) 3*, 2016, 63 – 72. [Гроздев, С. & В. Ненков (2016). Наградата на името на Н. Х. Абел за 2016 година, *Математика плюс, (24) 3*, 2016, 63 – 72.]

Lemke, Oliver, R. & K. Soundararajan (2017), Unexpected biases in the distribution of, Proceedings of the National Academy of Sciences 113 (31). (E4446-E4454). Powers, R. E. (1911). *The Tenth Perfect Number, American Mathematical Monthly. 18, 195–7. (*doi*:*10.2307/2972574. JSTOR 2972574*. The article is signed "DENVER, COLORADO, June, 1911).*

Ribenboim, P. (2004). *The little book of bigger numbers*. Berlin, New York: Springer-Verlag, p. 4. (ISBN 978-0-387-20169-6).

ABOUT THE PRIME NUMBERS

Abstract. Some of the basic hypotheses about the prime numbers are considered, which determine their important properties for Mathematics.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
45, Stoyan Balgarencheto Str.
5662 Beli Osam, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg