

ЗА ПРИРОДАТА НА МАТЕМАТИКАТА И ЗА МАТЕМАТИКАТА В ПРИРОДАТА – ЕДНА ПРИКАЗКА ЗА СИМЕТРИЯТА С ПРОДЪЛЖЕНИЕ ЗА МАЛКИ И ГОЛЕМИ

Цветелин Андреев

Резюме. В статията се описват дейности за изграждане на представа за симетрии. В тях участват деца на възраст между 5 и 9 години и родител в ролята на неформален учител. Чрез активни игри и занимания децата изследват симетрията в спорта, архитектурата, биологията, граматиката, литературата, музиката и математиката. Дейностите са проведени на открито сред природата. Демонстрират се методически принципи за работа с деца. Представени са идеи за продължение на изследването на симетрии с компютър.

След проведените срещи децата демонстрират способност да разпознават симетрии в области и ситуации, различни от поставените. Това доказва основната теза на статията: същността на математиката, а именно изследването на заобикалящия ни свят, може да бъде уловена успешно в неформална среда на всякаква възраст.

Ключови думи: симетрия; неформално образование; конструкционизъм; теория на множествената интелигентност

*Училището може да е всичко,
не само сграда или чин.
Защо да не е хълм, тревичка
или гнездо върху комин.*

Петя Кокудева

Никога не е рано да отворим очите на децата за красотата в математиката (или за математиката в красотата). И не е толкова важно къде става това – дали в класната стая с таблицата за умножение, зад компютъра, вкъщи, или сред природата, а да помислим как и каква „храна за размисъл“ даваме на децата.

Затова сега, когато класните стаи са заключени, е подходящ момент ние, родители и учители, да видим какви други възможности за работа с деца има. В следващия текст показвам как в ролята си на родител и неформален учител заедно с 6 – 8 деца на възраст между 5 и 9 години откриваме едновременно математика в природата и природата на математиката. В няколко срещи на открито чрез игри, занимания с лист и молив и с компю-

тър изследваме симетрията в различни области от живота. Показвам как идеи от образователните теории на конструкционизма на Сиймър Пепърт и множествената интелигентност на Хауърд Гарднър могат да се приложат в неформална среда и така заедно с децата да открием красотата в математиката и ученето (от гръцки *μάθημα* (*máthema*) — наука, знание, учене) (Sendova 2017).

А красотата в ученето я има, когато сме в хармония с децата, когато има радост и игри, когато тръгнем от интересите на децата или успеем да ги ввлечем в нашите.

Хармония има там, където се дава възможност на децата да учат по свой уникален начин. Не е задължително всички да минем по един път, за да стигнем до целта. За едни урокът ще е танц, за други – поема, за трети – рисунка, мелодия и т.н. (Chehlarova & Sendova 2010).



Вариация на карикатура за недостатъка на стандартизираното оценяване

Горско училище на тема „симетрия“

Нуждата от движение и разнообразяване на онлайн обучението доведе до идеята да организирам неделни математически разходки на открито за моите две деца и техни приятели. Освен неформален учител и родител през последните години нерядко съм бил в ролята и на „формален“. Водих няколко курса за деца по програмиране, математика, училище по добродетели, музикални занимания. По образование съм информатик, учител по информатика и ИТ, начален учител. Преминал съм през курсове за методите на Мария Монтесори, Валдорфската педагогика, конструкционизъм.

Темата „симетрия“ дойде без много чудене: свързана е с красотата и изкуството, има я навсякъде около нас и ни помага в ежедневието. *В много от изследваните обекти в химията, физиката, биологията, медицината и др. симетрията е факт, който позволява съкращаване на експериментите и разсъжденията* (Chehlarova & Chehlarova 2015).

В тази статия съм описал срещите и реакциите на децата и последвалите занимания на закрито. Надявам се в нея всеки родител и учител да открие по някоя идея, която може да приложи, промени и обогати в зависимост от обстоятелствата.

Трудна, по-трудна, най-трудна симетрия



Много трудна симетрия

Първата математическа разходка с децата започна с игри сред падналите есенни листа и с много тичане. След тях децата имаха нужда да починат, и насядаха по пейките. Тъкмо този момент използвах, за да въведа групата в темата с първата ни игра. Разделих децата на отбори по двойки и дадох указания. От всеки отбор последователно играч 1 трябваше да покаже фигура с тялото си, а играч 2 да направи същата поза, но огледална. Демонстрирах правилата, като влязох в ролята на играч 1 и после на играч 2. Въпреки че децата нямаха изградена представа за понятието осева симетрия, те имаха интуитивна представа за огледален образ и с радост се включиха. Последвах интересни фигури с тела и в края на играта се оказа, че (по техните думи) има *по-трудна симетрия, по-малка симетрия, симетрия от сърце*.



По-малка и симетрия от сърце

Според Пиаже – основател на конструктивизма, децата са *строители на собственото си знание*. Конструкционизмът добавя, че това, което „строят“, трябва да е *продукт, който може да се споделя* (Sendova 2017).

Това се случи и в играта – децата построиха фигури, които споделяха с публиката. Снимахме, за да изследваме симетрията по-късно в домашна обстановка с помощта на компютър.

Симетрията наоколо

Играта премина в търсене на симетрични обекти наоколо. Веднага забелязахме плочките, стадиона, скамейките, листата. Сгънахме едно листо на две, за да проверим дали двете страни съвпадат. Почти съвпаднаха! А това „почти съвпадение“ в естествения език означава *да има симетрия*. Макар скамейките да не бяха разположени симетрично спрямо централната линия на стадиона, всяка от тях е симетрична спрямо гредата в средата си. По време на изследването на симетрията с компютър забелязахме, че с направената от нас снимка на стадиона е трудно да се види симетрията спрямо централната линия. Затова решихме да използваме снимка от сателит.



Листо от явор. Скамейка. Снимка на стадиона от сателит

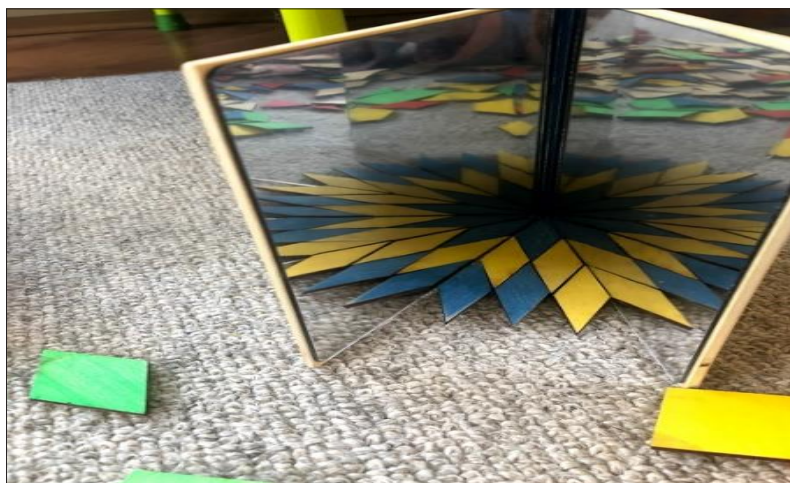
Игра със срички

Децата бяха насядали по пейките за кратка почивка. Започнаха да играят със сричките на имената си, като си ги разменяха. Забелязаха няколко интересни съвпадения като това, че на няколко от децата имената се запазваха същите след размяната. Този момент беше подходящ да насоча вниманието им към симетрията в думите. Предложих да променим малко играта и вместо да търсим имена, които се запазват след размяна на срички, да потърсим думи, които се запазват, като ги прочетеш отпред назад и отзад напред. Веднага последваха „капак“, „ама“, „радар“. Изследвахме и „аз обичам мач и боза“. Показах къде е симетрията в думите, като „разделим“ думата на две и от двете страни остават симетрични срички. В случая с нечетен брой букви буквата в средата играе роля на ос на симетрията.

За децата този преход беше естествен. Те продължиха да се забавляват, докато усвояват уменията да откриват симетрията в естествения език.

Интерес у мен предизвика твърдението на едно от по-малките деца – то каза, че неговата симетрична дума е „огледало“. На пръв поглед погрешното твърдение криеше известна доза истина: огледалото владее симетрията до съвършенство, а самата дума може да стане „симетрична“ ако изменим някои букви, например ако махнем „г“ и заменим „е“ с „а“ се получава „оладало“. Споделих с детето тези наблюдения. То остана доволно, а за мен изводът е да

приемам грешките като възможност – в случая бих могъл да поставя въпроса: „Как да променим думата така, че да стане „симетрична“?“, или да изследваме симетрията в отразяването на светлината с огледало. Или както впоследствие направихме, да използваме огледало, за да построим розетки с конструктор.



Изследване на симетрии с конструктор и двойно огледало

Изводът от тази ситуация за мен е, че за да се следва интересът на деца, е нужно водещият да е наблюдателен. Така той може да промени плана в хода на действието. Ако имах строг план, към който непременно се стремя, може би нямаше да забележа връзката на играта на думи и симетрията. Може би щях да я приема като отклонение. Ако бях избързал да отбележа отговора „огледало“ като грешен, щеше да ми е по-трудно да видя в него продължението на темата „симетрия“. И наистина, верността на твърдението дали дадена форма е симетрична, или не, зависи от контекста и гледната точка. Казваме, че човешкото тяло е симетрично, но ако се загледаме внимателно, ще открием разлики в двете половини. Ако го погледнем в профил, тогава липсва ли симетрията? Едно литературно произведение може да е симетрично, но къде точно минава оста на симетрията – това може да не е очевидно. Важно е да сме наясно „в какъв смисъл“ нещо е вярно. Например, ако приемем, че форма в природата е симетрична, когато след трансформация запазва еднаквостта си с допустимо отклонение от 3 мм, тогава повечето пеперуди и цветя ще са симетрични.

Изследване на симетрия с „точното око“ на компютъра

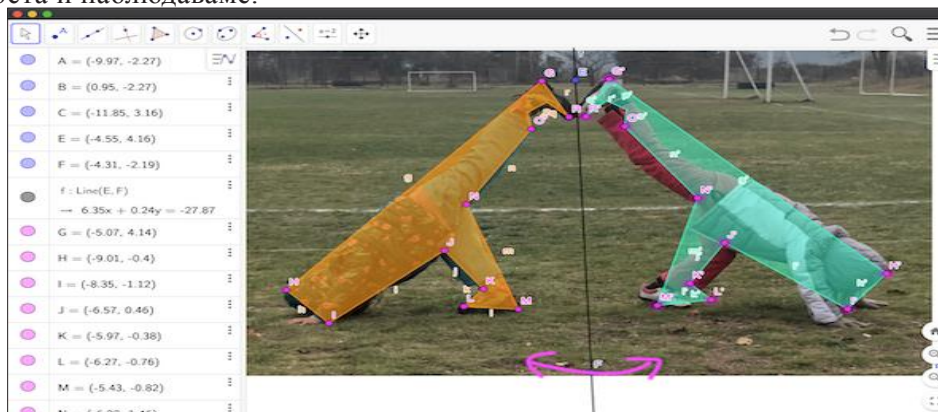
Важно е да покажем на децата, че ИТ не са само „информационни технологии“, от които черпим пасивно информация. Информационните тех-

нологии са и среда за изследване и творчество с голямото предимство, че получаваме обратна връзка за разсъжденията си почти мигновено. Но колко често това става в училище или вкъщи? Сиймър Пепърт пише преди 40 години в книгата си *Mindstorms: Children, Computers, Powerful Ideas*: „Има огромна разлика между това, което компютрите могат, и това, което обществото избира да прави с тях...“ (Papert 1980).

Колко точна е симетрията в нашите симетрични пози? Къде точно са оста или центърът на симетрия? На тези въпроси бързо и лесно успяхме да отговорим по време на последвалите домашни занимания с компютър.

В случая използвах средата GeoGebra, но тези изследвания могат да бъдат направени и с други инструменти. Например симетрията да се опише чрез команди на език за програмиране, които могат да се редактират и така да се увеличат възможностите за експериментиране. Тук „да се учиш да програмираш“ или „да програмираш, за да се учиш“, много добре ни подсказва къде да търсим смисъла на училището и да избягваме самоцелното програмиране и следване на предварителни учебни програми.

Но нека преминем към действие (или по-точно „конструиране“). Първо поставяме снимка в GeoGebra. После построяваме предполагаемата ос на симетрия. Описваме едната фигура по един от следните начини: или с точка и симетричната ѝ точка, които оставят следи (децата местят точката по контурите на фигурата), или построяваме многоъгълник около фигурата. Вторият начин ни позволява да преценим дали околмерът ни за ос на симетрия е точен, като местим оста на симетрия. Накрая отразяваме спрямо оста и наблюдаваме.



Изследване на симетрични пози в GeoGebra

Същото упражнение може да се направи и с ротационна симетрия. Децата могат да правят розетки или снежинки с телата си, налягали в кръг, или

да изследваме венчелистчета, напречно разрязана ябълка. Още идеи има във Виртуалния училищен кабинет по математика (Chehlarova, Gachev, Kenderov & Sendova 2014) (Chehlarova 2020).

Друга задача е свързана с осева симетрия на графичния образ на думите. Когато с едно от децата изследвахме това, се оказа, че някои думи са не само палиндромы (остават еднакви, ако се четат отпред назад и отзад напред), но са симетрични и по отношение на графичното им представяне. Симетрията ни изненадва отвсякъде, стига да сменим гледната точка!



Изследване на симетрични думи в GeoGebra

Симетрия в литературата

Луис Карол – известният автор на „Алиса в Страната на чудесата“ и математик в Оксфорд, ни дава чудесен пример за симетрия със стихотворението си:

<i>I</i>	<i>often</i>	<i>wondered</i>	<i>when</i>	<i>I</i>	<i>cursed</i>
<i>Often</i>	<i>feared</i>	<i>where</i>	<i>I</i>	<i>would</i>	<i>be</i>
<i>Wondered</i>	<i>where</i>	<i>she'd</i>	<i>yield</i>	<i>her</i>	<i>love</i>
<i>When</i>	<i>I</i>	<i>yield</i>	<i>so</i>	<i>will</i>	<i>she</i>
<i>I</i>	<i>would</i>	<i>her</i>	<i>will</i>	<i>be</i>	<i>pitied</i>
<i>Cursed</i>	<i>be</i>	<i>love</i>	<i>she</i>	<i>pitied</i>	<i>me</i>

Японското хайку е друг пример за симетрия. По броя на сричките първият и третият (последният) ред са симетрични спрямо втория, съответно с 5, 7 и 5 срички. Следната игра може да се използва за построяване на стихотворение. Първо определяме 3 колони за записване на думи, които отговарят съответно на въпросите: „Кой или какво?“, „Какво прави?“, „Как го прави?“. После децата поред попълват с по 6 думи във всяка колонка. Накрая образуваме изречения, като хвърляме зарче в 3 серии – по една а за всеки ред на стихотворението.

И сякаш по чудо на една от разходките с децата те и зарчето сътвориха следното стихотворение, което след малко редактиране точно пресъздаде

атмосферата, която кипеше наоколо: пълна стая с 6 деца със зачервени бузи, които скачат по диваните от радост, че са на топло след игрите в студения есенен ден, докато домакинът спокойно се радва на компанията им.

В първата си версия стихотворението гласеше:

*Къщата скача бързо.
Печката тича гъделичкащо.
Домакинът диша бавничко.*

С децата преброихме сричките и установихме, че за да постигнем симетричната структура по броя им в редовете, е нужна редакция. След намаляване на сричките и размяна на няколко думи стихотворението зазвуча като едно истинско хайку (е, почти):

*Къщата скача.
Печката топли с гъдел.
Дишаме бавно.*

Вероятно редактирането би било по-лесно, ако бяхме съобразили броя на сричките, докато попълвахме думите в таблицата, и бяхме определили на кой ред колко срички искаме. Например съществителното да е с 3 срички, глаголтът – с 2, наречието – с 2, и за първия и третия ред хвърляме по 2 пъти, а за втория – 3.

Симетрия в музиката

Втората сбирка даде начало и на изследването на симетрията в музиката. Спонтанно едно от децата изсвири мелодията на песента по текст на Асен Разцветников „Над люлката“ симетрично с двете ръце (симетрична спрямо ре, изсвирена в до мажор).



Нямам търпение да ни се удаде възможност да развием темата с импровизации над рачешкия канон на Й.С. Бах, който е музикален палиндром (Hofstadter 2011).

Резултат

Следната ситуация разкрива толкова добре резултата от дейностите на тема „симетрия“, че няма нужда да добавям нищо. Случи се малко след като бяхме разгледали темата за ротационната симетрия с пример с цвете, което, след като се завърти, запазва формата си.

Едно от децата заедно с майка си чистят боб и пеят на два гласа песента „Кавале, кавале“. Изведнъж детето спира и пита: „Мамо, знаеш ли, че цветето е симетрично? Ей така, като го завъртиш, то си остава същото“. Майката се смее. В следващия момент детето обелва едно зърно боб, разцепва го на две и казва: „И бобът е симетричен. Виж. И го ядем, за да станем и ние симетрични... Ама ние сме си симетрични. Линията минава точно през средата на носа“. И посочва.



Симетрия в бобено зърно

В последвалата дискусия едно от децата се вглежда в лицето ми и забелязва, че едното ми око е по-затворено от другото. Договаряме се да снимаме лицата си и да ги изследваме с помощта на компютър.

Задачи за читателите изследователи

Задача 1.

Играта „Боб в тавичка“ се играе по следния начин: две деца слагат последователно бобени зърна в кръгла тавичка. Играта печели този, който сложи последното зърно. При поставянето зърната не трябва да се застъпват. Първият играч има печеливша стратегия, ако започне с бобче точно в центъра. Каква е тя?

Междучасия

Последно, но не по важност, споделям няколко момента от радостта на децата, докато бяха навън. Както в училище, междучасията следват часовете, така и ние имаме ритъм, в който се редуват занимания и време за свободната игра, отпускане и свързване с природата.



Есенни игри

Извод – нужна ли ни е класна стая, за да учим математика?

Макар термини като *конструкционизъм* и *множествена интелигентност* (в смисъла на Хауърд Гарднър) да звучат далечно за повечето родители и учители, горният пример потвърждава, че идеите зад тях могат да се прилагат успешно вкъщи, по време на неделната разходка, а защо не и в училище.

Въпросът не е дали ни е нужна класната стая. Въпросът е как да направим такава среда, в която отваряме очите на децата за красотата в математиката и всяко едно от тях да има възможност да учи и да се изразява по свой уникален начин.

Нека видим как можем да превърнем заключените класни стаи във възможност. Защото именно да търсиш възможности в трудностите, е в сърцето на математиката. Не знаем какви ще са проблемите, пред които децата ще се изправят в бъдеще. Това, което можем да направим за тях, е да им помогнем да са гъвкави, да задават въпроси и да търсят отговори.

Или както се пее в песен от детско предаване по БНТ, излъчено преди около 20 години:

„Защо“ е думичка вълшебна,
„защо“ е думичка потребна,
чудесна дума е „защо“
навред по земното кълбо.

Понякога с едно „защо“
ще чуеш отговори 100,
„защо“ не се изтрива с гума,
защото е вълшебна дума.

Благодарности. На децата за техния неуморен труд. На Жени Сендова (ИМИ – БАН), която даде идеята за темата на заниманията, подсказа голяма част от тях, редактира статията и издигна идеите в нея на друго ниво.

БЕЛЕЖКИ

Споделям няколко полезни връзки към интернет ресурси:

1. Виртуален учебен кабинет по математика. <https://cabinet.bg/> (последно посещение 06.01.2021).
2. За детерминанти, поеми и симетрия. On Matrix Determinants, Poems, and Symmetry <https://irthoughts.wordpress.com/2018/11/18/on-matrix-determinants-poems-and-symmetry/> (последно посещение 06.01.2021).
3. Визуализация на рачешки канон в „Музикално приношение“ от Й. С. Бах. Jos Leys. J.S. Bach – Crab Canon on a Möbius Strip. <https://www.youtube.com/watch?v=xUHQ2ybTejU> (последно посещение 06.01.2021).

ЛИТЕРАТУРА

- Чехларова, Н. & Чехларова, К., 2015. Проверка и подобряване на дигиталната компетентност и общата култура чрез симетрии. В: *Инструменти за привлекателно образование*. София: Сдружение „Център за творческо обучение“, 52 – 56..
- Кендеров, П., Чехларова, Т. & Гачев, Г., 2021. Онлайн състезание „VIVA Математика с компютър“. *Математика и информатика*, **64**(1), 36 – 51
- Сендова, Е., 2017. Конструкционизмът като образователна философия и култура в български контекст — в памет на Сиймър Пепърт. В: *Математика и математическо образование – 46-а пролетна математическа конференция*. Боровец: Съюз на българските математици.

- Пепърт, С., 1980. *Mindstorms: Children, Computers, Powerful Ideas*. The Harvester press.
- Чехларова, Т., 2020. Ресурси за самопроверка във Виртуалния училищен кабинет по математика. *Педагогика*, **92**(2), 168 – 179.
- Хофстагър, Д., 2011. *Гьодел, Ешер, Бах: Една гирлянда към безкрайността*. София: Изток-Запад.

REFERENCES

- Chehlarova, T. & Sendova, E., 2010. Stimulating different intelligences in a congruence context. In: *Constructionist approaches to creative learning, thinking and education: Lessons for the 21st century. Proceedings for Constructionism 2010. The 12th EuroLogo conference*. 16 – 20 August, Paris, France. ISBN 978-80-89186-65-5 (Proc) ISBN 978-80-89186-66-2.
- Chehlarova, N. & Chehlarova, K., 2015. Proverka i podobryavane na digitalnata kompetentnost I obshtata kultura chrez simetrii – Assessment and improvement of digital competences and general knowledge trough symmetries. In: *Instrumenti za privlekatelno obrazovanie – Instruments for attractive education*. Sofia: Center for creative training, 52 – 56. [In Bulgarian].
- Chehlarova, N. & Gachev, G., 2021. Online contest “Mathematics and art” for the development of key competencies. *Pedagogika-Pedagogy*, **93**(1), 87 – 99. Sofia: Az-buki.
- Kenderov, P., Chehlarova, T. & Gachev, G., 2021. Onlayn sastezanie „VIVA Matematika s kompyutar“ – Online competition “VIVA Mathematics with computer”. *Mathematics and Informatics*, **64**(1), 36 – 51. Sofia: Az-buki. [In Bulgarian].
- Chehlarova, N., 2021. Axes of symmetry dominoes. In: *Symmetry: Culture and Science*, **32**(1), 103 – 111.
- Sendova, E., 2017. Constructionism as an educational philosophy and a culture – a tribute to Seymour Papert. In: *Mathematics and education in mathematics – proceedings of the 46th Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*. Borovets. [In Bulgarian].
- Papert S., 1980. *Mindstorms: Children, Computers, Powerful Ideas*. The Harvester press.
- Chehlarova, T., Gachev, G., Kenderov, P. & Sendova, E., 2014. *A Virtual School Mathematics Laboratory*. In: *V-th National Conference on e-Learning*. Ruse: University of Ruse, 146 – 151.
- Chehlarova, T., 2020. Resursi za samoproverka vav Virtualnia uchilishten kabinet po matematika – Resources for self assessment in the Virtual

- School Mathematics Laboratory. *Pedagogika-Pedagogy*, **92**(2), 168–179. Sofia: Az-buki. [In Bulgarian].
- Hofstadter D., 1999. *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books.

**OF THE NATURE OF MATH AND MATH IN NATURE –
A SEQUEL ABOUT SYMMETRY
FOR CHILDREN AND ADULTS**

Abstract. The paper describes activities for developing the notion of symmetries. The activities were performed by a group of children between the ages of 5 and 9 and a parent of two of them. Through play and active work the group explores symmetries in sports, architecture, biology, language, music and mathematics. The activities were carried out outdoors in nature. Ideas for complementary activities with computers are presented. As a result the children demonstrate the ability to recognize symmetries in areas and situations different from the ones set in the activities they performed. This proves the main thesis of the paper: the nature of mathematics can be captured successfully in an informal environment at any age.

Keywords: symmetry; non-formal education; constructionism; theory of multiple intelligences

✉ **Mr. Cvetelin Andreev**
<https://publons.com/researcher/4144445>
Bulgaria
E-mail: cvetelin.andreev@gmail.com