

ХОМОТЕТИЧНИ КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ В РАВНИНАТА НА ТРИЪГЪЛНИК

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Българска академия на науките

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия е описан един начин за обединяване на коничните сечения в равнината на даден триъгълник в класове от хомотетични криви. Тези класове се определят от описаните за триъгълника конични сечения.

Keywords: triangle, homothety, conic, pole, polar

Всяко конично сечение, описано около фиксиран $\triangle ABC$, притежава характерни афинни и метрични параметри, по които то се различава от всички останали описани конични сечения за $\triangle ABC$. Оказва се освен това, че всяко такова конично сечение определя цял клас от конични сечения в равнината на $\triangle ABC$ с хомотетични свойства. В следващите редове ще опишем аналитично тези класове, като за целта ще използваме барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$ с $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.

Нека $\bar{k}(O)$ е описано около $\triangle ABC$ конично сечение с център $O(x_0, y_0, z_0)$. Ако $\bar{k}(O)$ е елипса или хипербола, то $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, а ако е парабола, имаме $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Точките от кривата $\bar{k}(O)$ се описват с уравнението:

$$(1) \bar{k}(O): (-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy = 0.$$

Разглеждаме крива от втора степен $\bar{c}$ в равнината на $\triangle ABC$, която е определена със следното уравнение:

$$(2) \bar{c}: a_{23}yz + a_{31}zx + a_{12}xy + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0,$$

където a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) са реални числа. По-нататък, в няколко етапа ще опишем при какви условия кривата $\bar{c}$ е хомотетична на $\bar{k}(O)$ и ще се спрем на някои свойства на $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$, свързани с тяхната хомотетичност.

1. Уравнение на крива, хомотетична на $\bar{k}(O)$. Ако $\bar{c}$ е хомотетична на $\bar{k}(O)$, двете криви имат едни и същи безкрайни точки. Те са общите решения на уравненията (1), (2) и уравнението на безкрайната права $x + y + z = 0$. Следователно безкрайните точки, принадлежащи на кривата $\bar{c}$, са решения на уравнението $a_{31}x^2 + (a_{23} + a_{31} - a_{12})xy + a_{23}y^2 = 0$, а тези на $\bar{k}(O)$ са решения на уравнението

$$(x_0 - y_0 + z_0)y_0x^2 + (-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)xy + (-x_0 + y_0 + z_0)x_0y^2 = 0.$$

Последните уравнения имат едни и същи решения тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата $a_{23} = k \cdot (-x_0 + y_0 + z_0)x_0$, $a_{31} = k \cdot (x_0 - y_0 + z_0)y_0$ и $a_{12} = k \cdot (x_0 + y_0 - z_0)z_0$, където k е различно от нула реално число. Така показахме, че когато $\bar{c}$ и $\bar{k}(O)$ са хомотетични, кривата $\bar{c}$ може да се представи с уравнение от вида:

$$(3) \quad \bar{c}: \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0xy] + \\ & + (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0. \end{aligned}$$

Обратно, ако кривата $\bar{c}$ се представя с уравнение (3), тя има същите безкрайни точки като $\bar{k}(O)$. Следователно видът на $\bar{c}$ съвпада с вида на $\bar{k}(O)$. Оттук обаче не следва, че двете криви са хомотетични. Последното може да се забележи по следния начин. Нека $\bar{c}$ е хипербола, която лежи в ъгъл α , определен от асимптотите на $\bar{c}$. Ако $\bar{c}$ е хомотетична на $\bar{k}(O)$, а $\tilde{c}$ е хипербола, която има същите асимптоти като $\bar{c}$, но лежи в ъгъла, допълнителен на α , то за $\tilde{c}$ са в сила проведените по-горе разсъждения за криви с общи безкрайни точки. Следователно хиперболатата $\tilde{c}$ също може да се представи с уравнение от вида (3), но тя не е хомотетична на $\bar{k}(O)$. По-нататък кривите от този вид ще включим в специален клас хомотетични криви, определени от $\bar{k}(O)$.

2. Център на крива $\bar{c}$, определена с уравнение (3). Ако $\bar{k}(O)$ е парабола, както беше отбелязано, кривата $\bar{c}$ с уравнение (3) има същата безкрайна точка като $\bar{k}(O)$. Тъй като в този случай безкрайната точка е център, то параболата $\bar{c}$ има за център безкрайната точка $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$). По-нататък ще определим координатите на центъра на кривата $\bar{c}$, когато тя е елипса или хипербола. За целта от барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$ ще преминем към афинни координати спрямо координатна система с център O и координатни вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Нека Ω е произволна точка в пространството, а $\vec{e}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $\vec{e}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ($\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0; i = 1, 2$) са неколинеарни вектори. За произволна точка $P(x, y, z)$ ($x + y + z = 1$) от равнината на $\triangle ABC$ са изпълнени равенствата $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} - \overrightarrow{O\Omega} = X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$, където (X, Y) са координатите на P спрямо афинната координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. От последното равенство получаваме $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + X\vec{e}_1 + Y\vec{e}_2$. Сега, като използваме, че $\overrightarrow{O\Omega} = x_0\overrightarrow{OA} + y_0\overrightarrow{OB} + z_0\overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_1 = \alpha_1\overrightarrow{OA} + \beta_1\overrightarrow{OB} + \gamma_1\overrightarrow{OC}$ и $\vec{e}_2 = \alpha_2\overrightarrow{OA} + \beta_2\overrightarrow{OB} + \gamma_2\overrightarrow{OC}$, намираме формулите, свързващи барицентричните координати (x, y, z) с афинните (X, Y) във вида

$$(4) \quad x = x_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 Y, \quad y = y_0 + \beta_1 X + \beta_2 Y, \quad z = z_0 + \gamma_1 X + \gamma_2 Y.$$

От (4) при $\vec{e}_1 = \overrightarrow{CA}(1, 0, -1)$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{CB}(1, -1, 0)$ получаваме равенствата

$$(5) \quad x = x_0 + X + Y, \quad y = y_0 - Y, \quad z = z_0 - X.$$

Нека $\bar{k}$ е произволна крива от втора степен в равнината на $\triangle ABC$, представена с уравнението

$$(6) \quad \bar{k}: \bar{a}_{11}x^2 + \bar{a}_{22}y^2 + \bar{a}_{33}z^2 + 2\bar{a}_{23}yz + 2\bar{a}_{13}zx + 2\bar{a}_{12}xy = 0.$$

След заместване на (5) в (6) определяме афинното уравнение на произволна крива $\bar{k}$ във вида

$$(7) \quad \bar{k}: (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{33} - 2\bar{a}_{13})X^2 + 2(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{12} + \bar{a}_{23} - \bar{a}_{13})XY + (\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} - 2\bar{a}_{12})Y^2 + \\ + 2[(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{13})x_0 + (\bar{a}_{12} - \bar{a}_{23})y_0 + (\bar{a}_{13} - \bar{a}_{33})z_0]X + \\ + 2[(\bar{a}_{11} - \bar{a}_{12})x_0 + (\bar{a}_{12} - \bar{a}_{22})y_0 + (\bar{a}_{13} - \bar{a}_{23})z_0]Y + \\ + \bar{a}_{11}x_0^2 + \bar{a}_{22}y_0^2 + \bar{a}_{33}z_0^2 + 2\bar{a}_{23}y_0z_0 + 2\bar{a}_{13}z_0x_0 + 2\bar{a}_{12}x_0y_0 = 0.$$

След прилагане на (7) за кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$, представени с уравненията (1) и (3), получаваме съответните им афинни уравнения

$$(8) \quad \bar{k}(O): (1 - 2y_0)y_0X^2 + (1 - 2y_0)(1 - 2z_0)XY + (1 - 2z_0)z_0Y^2 - x_0y_0z_0 = 0,$$

$$(9) \quad \bar{c}: k(1 - 2y_0)y_0X^2 + k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)XY + k(1 - 2z_0)z_0Y^2 + \\ + (a_{33} - a_{11})X + (a_{22} - a_{11})Y - (kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) = 0.$$

Сега, според аналитичната геометрия (Мартинов, 1989) центърът на крива с уравнение (9) се определя от системата уравнения

$$\begin{cases} 2k(1 - 2y_0)y_0X + k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)Y + a_{33} - a_{11} = 0, \\ k(1 - 2y_0)(1 - 2z_0)X + 2k(1 - 2z_0)z_0Y + a_{22} - a_{11} = 0. \end{cases}$$

Тази система има следните решения:

$$X_0 = -\frac{a_{11}(1 - 2x_0) + a_{22}(1 - 2y_0) - 2a_{33}z_0}{k(1 - 2x_0)(1 - 2y_0)}, \quad Y_0 = -\frac{a_{11}(1 - 2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1 - 2z_0)}{k(1 - 2z_0)(1 - 2x_0)}.$$

Ако $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1})$ е центърът на кривата $\bar{c}$, след заместване на последните равенства в (5) намираме координатите на O_1 чрез формулите

$$(10) \quad \begin{aligned} x_{O_1} &= x_0 - \frac{-2a_{11}x_0 + a_{22}(1-2y_0) + a_{33}(1-2z_0)}{k(1-2y_0)(1-2z_0)}, \\ y_{O_1} &= y_0 - \frac{a_{11}(1-2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1-2z_0)}{k(1-2z_0)(1-2x_0)}, \\ z_{O_1} &= z_0 - \frac{a_{11}(1-2x_0) + a_{22}(1-2y_0) - 2a_{33}z_0}{k(1-2x_0)(1-2y_0)}. \end{aligned}$$

3. Радикална ос на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$. От уравненията (1) и (3) се вижда, че ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат общи крайни точки, тези точки лежат върху права r с уравнение

$$(11) \quad r: a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z = 0.$$

Следователно, изпълнено е следното

Твърдение 1. *Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат най-много две общи крайни точки.*

Правата r съществува независимо от това, дали $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат, или нямат общи точки. Оказва се, че правата r притежава редица свойства, които има радикалната ос на две окръжности. Затова правата r ще наричаме *радикална ос на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$.*

Преминаваме към описване на някои свойства на радикалната ос r . Нека кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ се пресичат в точки $M_1(x_{M_1}, y_{M_1}, z_{M_1})$ и $M_2(x_{M_2}, y_{M_2}, z_{M_2})$, а $M\left(x_M = \frac{x_{M_1} + x_{M_2}}{2}, y_M = \frac{y_{M_1} + y_{M_2}}{2}, z_M = \frac{z_{M_1} + z_{M_2}}{2}\right)$ е средата на отсечката M_1M_2 . След елиминирание на неизвестните y и z от системата уравнения, образувана от (1), (11) и $x + y + z = 1$, получаваме квадратното уравнение

$$\tau x^2 - \{a_{22}a_{33}[(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - (-x_0 + y_0 + z_0)x_0] + a_{11}(a_{22} + a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0\}x - a_{22}a_{33}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 = 0,$$

където

$$(12) \quad \begin{aligned} \tau &= a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) + \\ &+ a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - \\ &- a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0. \end{aligned}$$

От формулата на Виет за сумата от корените на това уравнение следва равенството

$$(13) \quad \begin{aligned} x_M &= \frac{a_{22}a_{33}[(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - (-x_0 + y_0 + z_0)x_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{11}(a_{22} + a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0}{2\tau}. \end{aligned}$$

Аналогично за другите две координати на M получаваме формулите

$$(14) \quad \begin{aligned} y_M &= \frac{a_{33}a_{11}[(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) - (x_0 - y_0 + z_0)y_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{22}(a_{33} + a_{11})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0 - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0}{2\tau}, \\ z_M &= \frac{a_{11}a_{22}[(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) - (x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{2\tau} + \\ &+ \frac{a_{33}(a_{11} + a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 - a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0}{2\tau}. \end{aligned}$$

Трябва да се отбележи, че точката M от радикалната ос r съществува независимо от съществуването на точките M_1 и M_2 . Освен това, след несложни пресмятания

$$\text{от (10), (12), (13) и (14) се вижда, че е изпълнено равенството} \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_{O_1} & y_{O_1} & z_{O_1} \\ x_M & y_M & z_M \end{vmatrix} = 0.$$

Това означава, че когато $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са елипси или хиперболи, точките O , O_1 и M лежат на една права. От друга страна, ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са параболи, то $O_1 \equiv O$, което по тривиални причини също означава, че O , O_1 и M лежат на една права. Така получихме следното:

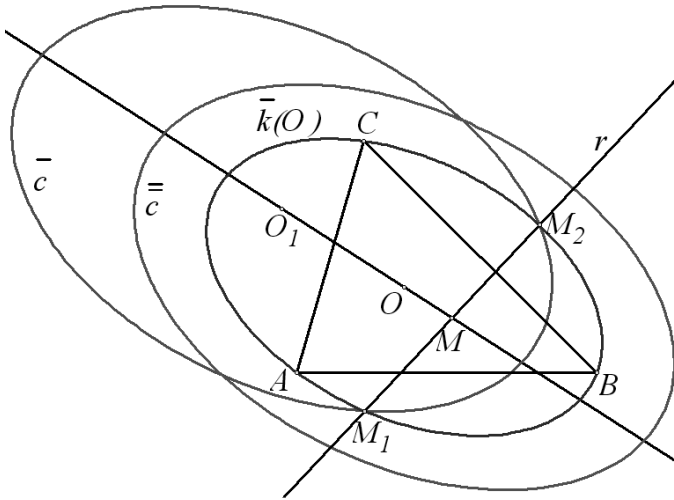
Твърдение 2. Централата OO_1 на $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ пресича радикалната им ос r в точката M (Фиг. 1, 2, 3, 4).

От това твърдение непосредствено се получават следствията:

Следствие 1. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат две крайни общи точки M_1 и M_2 , средата M на отсечката M_1M_2 лежи върху централата на двете криви.

Следствие 2. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат крайна допирна точка M , радикалната ос r на двете криви е тяхна обща допирателна в точката M .

От следствия 1 и 2 се вижда, че когато кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ имат поне една обща крайна точка, радикалната ос r е спрегната с OO_1 както спрямо $\bar{k}(O)$, така и спрямо $\bar{c}$. Затова възниква въпросът дали r има същото свойство и в случая, когато $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ нямат общи крайни точки. В случая с параболи безкрайната точка (център) $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$) определя общо особено направление спрямо $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$, което е спрегнато с всяко направление в равнината на $\triangle ABC$, а следователно и с радикалната ос r (Мартинов, 1989). По-интересният случай, когато $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$



Фиг. 1

са елипси или хиперболи, се изследва по следния начин. От аналитичната геометрия е известно, че векторите $\vec{u}'(\alpha', \beta')$ и $\vec{u}''(\alpha'', \beta'')$ (координатите са афинни) са спрегнати спрямо кривата $\bar{k}$, представена с афинното уравнение

$$(15) \quad \bar{k}: \bar{a}_{11}X^2 + 2\bar{a}_{12}XY + \bar{a}_{22}Y^2 + 2\bar{a}_{13}X + 2\bar{a}_{23}Y + \bar{a}_{33} = 0,$$

когато скаларната функция $\Phi_{\bar{k}}(\vec{u}', \vec{u}'') = \bar{a}_{11}\alpha'\alpha'' + \bar{a}_{12}(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') + \bar{a}_{22}\beta'\beta''$ на векторните аргументи $\vec{u}'$ и $\vec{u}''$ има стойност, равна на нула (Мартинов, 1989). Сега от (5) и (10) лесно се забелязва, че векторът

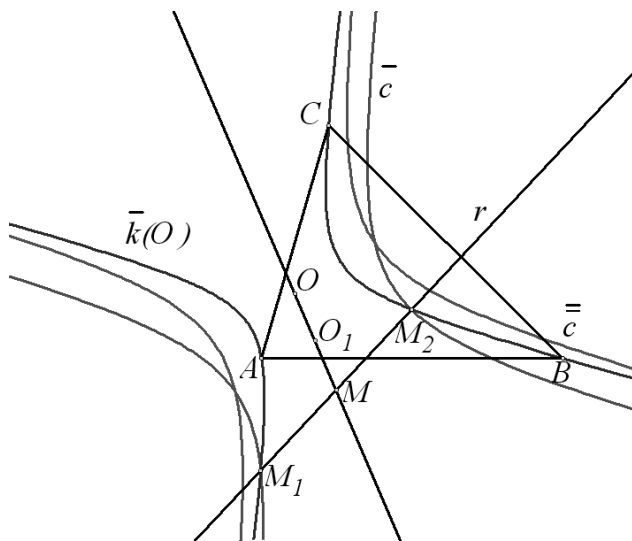
$\vec{u}'((1-2z_0)[a_{11}(1-2x_0) + a_{22}(1-2y_0) - 2a_{33}z_0], (1-2y_0)[a_{11}(1-2x_0) - 2a_{22}y_0 + a_{33}(1-2z_0)])$ е колинеарен с централата OO_1 . След това отново от (5) намираме, че афинното уравнение на радикалната ос r е следното:

$$(16) \quad r: (a_{11} - a_{33})X + (a_{11} - a_{22})Y + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

Следователно векторът $\vec{u}''(a_{22} - a_{11}, a_{11} - a_{33})$ е колинеарен с правата r . Накрая, от (8) и (9) намираме $\Phi_{\bar{k}(O)}(\vec{u}', \vec{u}'') = \Phi_{\bar{c}}(\vec{u}', \vec{u}'') = 0$. Така получаваме следното:

Твърдение 3. Централата OO_1 и радикалната ос r са спрегнати прави както спрямо $\bar{k}(O)$, така и спрямо $\bar{c}$.

Следващото свойство на радикалната ос r на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ е свързано с полярите на нейните точки. Затова ще определим уравнението на полярата на



Фиг. 2

произволна точка $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ спрямо крива $\bar{k}$ с уравнение (6) в равнината на ΔABC . От аналитичната геометрия (Станилов, 1979) е известно, че полярата $\bar{p}$ на точка $\bar{P}(\bar{X}, \bar{Y})$ спрямо крива с уравнение (15) се определя с уравнението

$$(17) \quad \bar{p}: (\bar{a}_{11}\bar{X} + \bar{a}_{12}\bar{Y} + \bar{a}_{13})X + (\bar{a}_{12}\bar{X} + \bar{a}_{22}\bar{Y} + \bar{a}_{23})Y + \bar{a}_{13}\bar{X} + \bar{a}_{23}\bar{Y} + \bar{a}_{33} = 0.$$

От (5), (7) и (17) получаваме, че полярата $\bar{p}$ на $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ спрямо $\bar{k}$ в барицентрични координати има следното уравнение

$$(18) \quad (\bar{a}_{11}\bar{x} + \bar{a}_{12}\bar{y} + \bar{a}_{13}\bar{z})x + (\bar{a}_{12}\bar{x} + \bar{a}_{22}\bar{y} + \bar{a}_{23}\bar{z})y + (\bar{a}_{13}\bar{x} + \bar{a}_{23}\bar{y} + \bar{a}_{33}\bar{z})z = 0.$$

Сега от (18), (8) и (9) намираме полярите $\bar{p}_k$ и $\bar{p}_c$ на произволна точка $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, съответно спрямо $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ във вида:

$$(19) \quad \bar{P}_k : \left[(x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{y} + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{z} \right]x + \left[(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{z} + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{x} \right]y + \left[(x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{x} + (-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{y} \right]z = 0.$$

$$(20) \quad \bar{P}_c : \begin{aligned} & \{2a_{11}\bar{x} + [a_{11} + a_{22} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0]\bar{y} + [a_{11} + a_{33} + k(x_0 - y_0 + z_0)]\bar{z}\}x + \\ & + \{[a_{22} + a_{11} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0]\bar{x} + 2a_{22}\bar{y} + [a_{22} + a_{33} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0]\bar{z}\}y + \\ & + \{[a_{33} + a_{11} + k(x_0 - y_0 + z_0)y_0]\bar{x} + [a_{33} + a_{22} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0]\bar{y} + 2a_{33}\bar{z}\}z = 0. \end{aligned}$$

Ако $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in r$, то от (11) следва, че е изпълнено равенството $a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z} = 0$. Оттук и от (20) намираме, че полярата $\bar{p}_c$ на $\bar{P}$ спрямо $\bar{c}$ има следното уравнение

$$(21) \quad \bar{p}_c : \left[a_{11} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{y} + k(x_0 - y_0 + z_0)\bar{z} \right]x + \\ + \left[a_{22} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{z} + k(x_0 + y_0 - z_0)z_0\bar{x} \right]y + \\ + \left[a_{33} + k(x_0 - y_0 + z_0)y_0\bar{x} + k(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\bar{y} \right]z = 0.$$

Като умножим (19) с $-k$ и съберем с (21), получаваме равенството $a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z = 0$, което е уравнението (11) на правата r . Следователно полярите $\bar{p}_k$ и $\bar{p}_c$ се пресичат върху r . Така доказахме следното:

Твърдение 4. Полярите $\bar{p}_k$ и $\bar{p}_c$ на произволна точка $\bar{P}$ от радикалната ос r на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ се пресичат в точка от r .

По-нататък е интересно да намерим полюсите на радикалната ос r на кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ спрямо всяка от двете криви. Преди това ще намерим координатите на полюса $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ на произволна права $l: ux + vy + wz = 0$ спрямо произволна крива $\bar{k}$, определена с уравнението (6). За да намерим полюса на l , ще потърсим полярите на две точки от l . Както е известно, те се пресичат в полюса $\bar{P}$ на l (Матеев, 1979). Нека l пресича правите BC и CA съответно в точките $P_a\left(0, \frac{w}{w-v}, \frac{v}{v-w}\right)$ и $P_b\left(\frac{w}{w-u}, 0, \frac{u}{u-w}\right)$. От (18) намираме полярите p_a и p_b , съответно на точките P_a и P_b , във вида

$$p_a : (a_{12}w - a_{13}v)x + (a_{22}w - a_{23}v)y + (a_{23}w - a_{33}v)z = 0, \\ p_b : (a_{11}w - a_{13}u)x + (a_{12}w - a_{23}u)y + (a_{13}w - a_{33}u)z = 0.$$

След това решаваме системата уравнения, образувана от последните две уравнения и равенството $x + y + z = 1$. Така получаваме координатите на полюса $\bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ във вида:

$$(22) \quad \bar{x} = \frac{(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})u + (a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})v + (a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23})w}{\Delta}, \\ \bar{y} = \frac{(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})u + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})v + (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})w}{\Delta}, \\ \bar{z} = \frac{(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})u + (a_{23}a_{11} - a_{12}a_{13})v + (a_{33}^2 - a_{11}a_{22})w}{\Delta},$$

където

$$(24) \quad \begin{aligned} \Delta = & \left[a_{23} (a_{23} - a_{12} - a_{13}) + a_{12} a_{33} + a_{13} a_{22} - a_{22} a_{33} \right] u + \\ & + \left[a_{13} (a_{13} - a_{12} - a_{23}) + a_{12} a_{33} + a_{23} a_{11} - a_{33} a_{11} \right] v + \\ & + \left[a_{12} (a_{12} - a_{23} - a_{13}) + a_{23} a_{11} + a_{13} a_{22} - a_{11} a_{22} \right] w. \end{aligned}$$

Нека $P_k(x_{P_k}, y_{P_k}, z_{P_k})$ и $P_c(x_{P_c}, y_{P_c}, z_{P_c})$ са полюсите на r съответно спрямо $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$. От (24), (1) и (3) за координатите на тези точки намираме формулите

$$(25) \quad \begin{aligned} x_{P_k} &= \frac{(-x_0 + y_0 + z_0)x_0[-a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \\ y_{P_k} &= \frac{(x_0 - y_0 + z_0)y_0[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \\ z_{P_k} &= \frac{(x_0 + y_0 - z_0)z_0[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0]}{(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}, \end{aligned}$$

$$(26) \quad \begin{aligned} x_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[-a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \left[-(a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} - 2a_{22}a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \right. \\ & \left. + a_{22}(a_{22} - a_{33})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(a_{33} - a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \\ y_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \left[a_{11}(a_{11} - a_{33})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 - \right. \\ & \left. - (a_{22}a_{11} + a_{22}a_{33} - 2a_{11}a_{33})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + a_{33}(a_{33} - a_{11})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \\ z_{P_c} &= \frac{1}{\Delta_c} \left\{ k \left[a_{11}(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(x_0 - y_0 + z_0)y_0 - a_{33}(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \times \right. \\ & \times (x_0 + y_0 - z_0)z_0 + \left[a_{11}(a_{11} - a_{22})(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + a_{22}(a_{22} - a_{11})(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + \right. \\ & \left. - (a_{33}a_{11} + a_{33}a_{22} - 2a_{11}a_{22})(x_0 + y_0 - z_0)z_0 \right] \Big\}, \end{aligned}$$

където

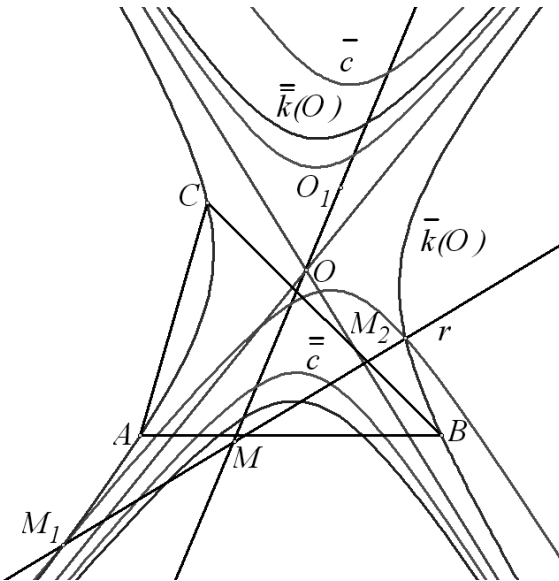
$$(27) \quad \begin{aligned} \Delta_c &= k(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \\ & - 2a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) - 2a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0) - \\ & - 2a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0) + 2a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)x_0 + \\ & + 2a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)y_0 + 2a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)z_0. \end{aligned}$$

Като приравним съответните координати на P_k и P_c , от (25) и (26) получаваме, че $P_k \equiv P_c$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$(28) \quad \begin{aligned} & 2a_{22}a_{33}(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)y_0z_0 + 2a_{33}a_{11}(x_0 + y_0 - z_0)(-x_0 + y_0 + z_0)z_0x_0 + \\ & + 2a_{11}a_{22}(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)x_0y_0 = \\ & = a_{11}^2(-x_0 + y_0 + z_0)^2x_0^2 + a_{22}^2(x_0 - y_0 + z_0)^2y_0^2 + a_{33}^2(x_0 + y_0 - z_0)^2z_0^2. \end{aligned}$$

От друга страна, равенството (28) е необходимо и достатъчно условие точките P_k и P_c да лежат на правата r . Следователно радикалната ос r има един и същ полюс спрямо $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ само когато двете криви са допирателни. Оттук получаваме още:

Следствие 3. *Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ се допират тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството (28).*



Фиг. 3

4. Хомотетичност на централните криви с уравнение (3). Нека кривата $\bar{c}$ има уравнение (3) и център $O_1(x_{O_1}, y_{O_1}, z_{O_1})$. Разглеждаме трансляция с вектор $\overrightarrow{OO_1}$. Ако $P_1(x_p, y_p, z_p)$ е точка от кривата $\bar{c}$ и $P(x_p, y_p, z_p)$ е съответната ѝ точка от образа $\bar{\bar{c}}(O)$ на $\bar{c}$ при разглежданата трансляция, то е изпълнено равенството $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{O_1O}$. Последното води до формулите: $x_p = x_p + x_{O_1} - x_0$, $y_p = y_p + y_{O_1} - y_0$, $z_p = z_p + z_{O_1} - z_0$. След заместване на тези равенства в (3) получаваме, че произволна точка $P(x_p \equiv x, y_p \equiv y, z_p \equiv z)$ ($x + y + z = 1$) от $\bar{\bar{c}}(O)$ удовлетворява уравнението

$$(29) \quad \bar{c}(O): \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0(y + y_{O_1} - y_0)(z + z_{O_1} - z_0) + \\ & + (x_0 - y_0 + z_0)y_0(z + z_{O_1} - z_0)(x + x_{O_1} - x_0) + \\ & + (x_0 + y_0 - z_0)z_0(x + x_{O_1} - x_0)(y + y_{O_1} - y_0)] + \\ & + a_{11}(x + x_{O_1} - x_0) + a_{22}(y + y_{O_1} - y_0) + a_{33}(z + z_{O_1} - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Нека сега l е права през O с направляващ вектор $\vec{l}(\alpha, \beta, \gamma) (\alpha + \beta + \gamma = 0)$. Правата l има следните параметрични уравнения:

$$(30) \quad x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad z = z_0 + \gamma t.$$

След заместване на (30) в (29) намираме, че общите точки (ако съществуват) на l и $\bar{c}(O)$ се получават при стойности на параметъра $t = t_c$, за които е изпълнено равенството

$$(31) \quad \begin{aligned} & k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_c^2 + \\ & + k \cdot [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0y_{O_1}z_{O_1} + (x_0 - y_0 + z_0)y_0z_{O_1}x_{O_1} + (x_0 + y_0 - z_0)z_0x_{O_1}y_{O_1}] + \\ & + a_{11}x_{O_1} + a_{22}y_{O_1} + a_{33}z_{O_1} = 0. \end{aligned}$$

По-нататък заместваме равенствата (10) в (31) и след несложни преобразувания получаваме

$$(32) \quad \begin{aligned} & k^2(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) \times \\ & \times [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_c^2 + \\ & + k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + \\ & + kx_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \tau = 0, \end{aligned}$$

където τ се изразява с равенството (12).

По отношение на общите точки (когато съществуват) на l и $\bar{k}(O)$ от (1) и (30) намираме, че стойностите на $t = t_k$, при които се получават тези точки, удовлетворяват равенството

$$(33) \quad [(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta]t_k^2 + x_0y_0z_0 = 0.$$

От (32) и (33) се вижда, че отношението

$$(34) \quad \begin{aligned} h = \frac{t_c^2}{t_k^2} = & \frac{1}{k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)} \times \\ & \times [k^2x_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0) + \\ & + k(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) - \tau] \end{aligned}$$

не зависи от направлението на вектора $\vec{l}$. Нека правата l пресича $\bar{k}(O)$ в точките M' и M'' , а $\bar{c}(O)$ – в точките N' и N'' . От (30) лесно следва, че са изпълнени равенствата:

$$\frac{|ON'|^2}{|OM'|^2} = \frac{|ON''|^2}{|OM''|^2} = \frac{|ON'|^2}{|OM'|^2} = \frac{|ON''|^2}{|OM''|^2} = h.$$

Тези равенства означават, че кривата $\bar{c}(O)$ се получава от $\bar{k}(O)$ при хомотетии с център O и коефициенти $\sqrt{h}$ и $-\sqrt{h}$. Така получаваме следните твърдения:

Твърдение 5. *Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са елипси, те са хомотетични (Фиг. 1).*

Твърдение 6. *Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}(O)$ са хиперболи, лежащи в един и същ ъгъл, определен от общите им асимптоти, то хиперболите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са хомотетични (Фиг. 2).*

Нека $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}(O)$ са хиперболи, които са разположени в различните ъгли, образувани от общите им асимптоти. Тогава никоя от правите l не пресича едновременно $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}(O)$, поради което числото h е отрицателно. Хиперболата $\bar{k}(O)$, която има следното уравнение:

$$\bar{k}(O): (1-2x_0)x_0yz + (1-2y_0)y_0zx + (1-2z_0)z_0xy - 2x_0y_0z_0(x+y+z) = 0,$$

е спрегната с $\bar{k}(O)$ (Моденов, 1969). За $\bar{k}(O)$ равенството (33) се заменя със следното

$$(33') \left[(-x_0 + y_0 + z_0)x_0\beta\gamma + (x_0 - y_0 + z_0)y_0\gamma\alpha + (x_0 + y_0 - z_0)z_0\alpha\beta \right] t_k^2 - x_0y_0z_0 = 0.$$

От (32) и (33') получаваме, че числото $(-h)$ съвпада с дясната част на равенството (34). Следователно хомотетиите с център O и коефициенти $\sqrt{|h|}$ и $-\sqrt{|h|}$ (h се пресмята по формулата (34)) преобразуват $\bar{k}(O)$ в хиперболата $\bar{c}(O)$. Следователно хиперболата $\bar{c}$ е хомотетична с хиперболата $\bar{k}(O)$, спрегната с $\bar{k}(O)$. Така получаваме следното:

Твърдение 7. *Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}(O)$ са хиперболи, лежащи в различните ъгли, определени от общите им асимптоти, то $\bar{c}$ е хомотетична с хиперболата $\bar{k}(O)$, която е спрегната с $\bar{k}(O)$ (Фиг. 3).*

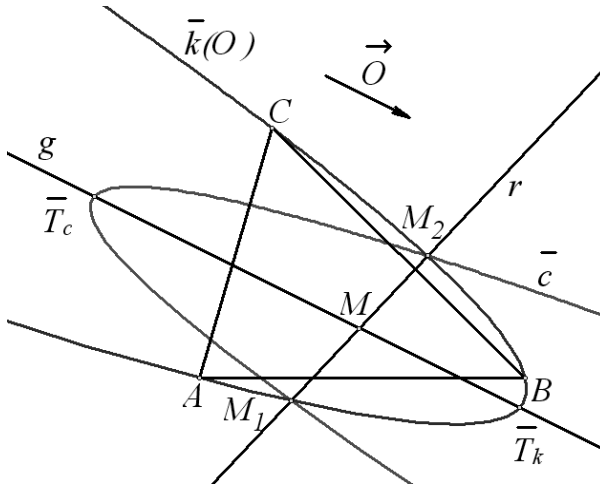
Към хомотетичността, описана в твърдения 5 и 6, трябва да се добави и уточнението, че кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са хомотетични и в случаите, когато са еднакви. Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви по смисъла на твърдения 5 и 6, когато $\bar{c}(O) \equiv k(O)$, т.е. когато $h = 1$. Следователно $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви, в случай че е изпълнено равенството

$$(35) kx_0y_0z_0(-x_0 + y_0 + z_0)(x_0 - y_0 + z_0)(x_0 + y_0 - z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) = \tau.$$

Кривите $\bar{\bar{k}}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви по смисъла на твърдение 7, когато $h = -1$. Следователно хиперболите $\bar{\bar{k}}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви, в случай че

$$(36) \quad 2k^2x_0y_0z_0(-x_0+y_0+z_0)(x_0-y_0+z_0)(x_0+y_0-z_0) + \\ + kx_0y_0z_0(-x_0+y_0+z_0)(x_0-y_0+z_0)(x_0+y_0-z_0)(a_{11}x_0+a_{22}y_0+a_{33}z_0) = \tau.$$

От твърдения 5, 6 и 7 следва, че при произволни реални стойности на константите k , a_{11} , a_{22} и a_{33} уравнението (3) задава централна крива, която е хомотетична на $\bar{k}(O)$ или на нейната спрегната $\bar{\bar{k}}(O)$ (в случай на хиперболи). Следователно, когато $\bar{k}(O)$ е елипса, всички криви в равнината на ΔABC , които имат уравнение (3), образуват клас от елипси, хомотетични на $\bar{k}(O)$. Когато $\bar{k}(O)$ е хипербола, всички криви в равнината на ΔABC , които имат уравнение (3), образуват два класа от хиперболи. Единият се състои от хиперболи, хомотетични с $\bar{k}(O)$, а другият – от хиперболи, хомотетични със спрегнатата на $\bar{k}(O)$ хипербола $\bar{\bar{k}}(O)$.



Фиг. 4

5. Хомотетичност на параболите с уравнение (3). Ако $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са параболи, то $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Затова уравненията им (1) и (3) се записват съответно във вида:

$$(1') \quad \bar{k}(O): x_0^2yz + y_0^2zx + z_0^2xy = 0,$$

$$(3') \quad \bar{c}: k(x_0^2yz + y_0^2zx + z_0^2xy) - (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0.$$

Изразът τ от (12) се представя във вида

$$(12') \quad \tau = 2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2,$$

а координатите (13) и (14) на точката M (която е среда на отсечката, определена от общите точки на параболите, когато те се пресичат) от радикалната ос r на $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ се представят с равенствата:

$$(37) \quad \begin{aligned} x_M &= \frac{(a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + x_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ y_M &= \frac{(a_{33}z_0 + a_{11}x_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + y_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ z_M &= \frac{(a_{11}x_0 + a_{22}y_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0) + z_0(a_{22}a_{33}x_0 + a_{33}a_{11}y_0 + a_{11}a_{22}z_0)}{2(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}. \end{aligned}$$

Най-естественият начин да се докаже, че параболите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са хомотетични, е този, при който могат да се определят центърът и коефициентът на хомотетията, която привежда едната крива в другата. Ако съществува хомотетия между параболите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$, правата g , минаваща през точката M успоредно на вектора (x_0, y_0, z_0) , пресича $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ съответно в точки $\bar{T}_k$ и $\bar{T}_c$, които са съответни при тази хомотетия. Затова ще търсим центъра на хомотетия за параболите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ върху правата g . Тази права има следните параметрични уравнения:

$$(38) \quad g: x = x_M + x_0t, \quad y = y_M + y_0t, \quad z = z_M + z_0t,$$

където за x_M , y_M и z_M са изпълнени равенствата (37).

За коефициента на хомотетията, изобразяваща параболата $\bar{k}(O)$ в $\bar{c}$, можем да предполагаме, че се получава от коефициента на хомотетията, изобразяваща централната крива $\bar{k}(O)$ в $\bar{c}$ при условието $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Така от (34) получаваме, че предполагаемият коефициент на хомотетия се изразява по следния начин

$$(39) \quad h_p = \frac{2kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0}{2kx_0y_0z_0}.$$

След заместване на (38) в (1') и (3') (като се вземат предвид равенствата (37)), се вижда, че съответните стойности $\bar{t}_k$ и $\bar{t}_c$ на t , при които се получават координатите съответно на $\bar{T}_k$ и $\bar{T}_c$, се пресмятат по формулите:

$$(40) \quad \begin{aligned} \bar{t}_k &= \frac{\vartheta}{4x_0y_0z_0(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \\ \bar{t}_c &= \frac{2k\vartheta}{4(2x_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)^2}, \end{aligned}$$

където

$$(41) \quad \vartheta = a_{11}^2x_0^4 + a_{22}^2y_0^4 + a_{33}^2z_0^4 - 2a_{22}a_{33}y_0^2z_0^2 - 2a_{33}a_{11}z_0^2x_0^2 - 2a_{11}a_{22}x_0^2y_0^2.$$

(Любопитно е да се отбележи, че равенствата (39) и (40) водят до зависимостта $\frac{\bar{t}_k}{\bar{t}_c} = h_p$.)

Сега да разгледаме хомотетия с център H и коефициент h_p (за който е изпълнено равенството (39)), която изобразява $\bar{T}_k$ в $\bar{T}_c$. Следователно е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{HT}_c = h_p \overrightarrow{HT}_k$, което води до координатното представяне на H във вида:

$$(42) \quad H \left(x_M + \frac{m}{1-h_p}x_0, y_M + \frac{m}{1-h_p}y_0, z_M + \frac{m}{1-h_p}z_0 \right),$$

където

$$(43) \quad m = \bar{t}_c - h_p \bar{t}_k = -\frac{\vartheta(4kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}{8kx_0^2y_0^2z_0^2(2kx_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)(a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0)}.$$

Нека сега $N(x_N, y_N, z_N)$ ($x_N + y_N + z_N = 1$) е произволна точка от параболата $\bar{k}(O)$, а $N'(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'})$ е нейният образ при разглежданата хомотетия. От векторното равенство $\overrightarrow{HN'} = h_p \overrightarrow{HN}$ и (42) намираме, че координатите на N' зависят от координатите на N по следния начин:

$$(44) \quad x_{N'} = h_p x_N + (1-h_p)x_M + mx_0, y_{N'} = h_p y_N + (1-h_p)y_M + my_0, z_{N'} = h_p z_N + (1-h_p)z_M + mz_0.$$

След заместване на (44) в лявата страна на (3'), като се вземат предвид равенствата (37), (39), (41) и (43), се установява, че получената стойност е равна на нула. Следователно N' е точка от параболата $\bar{c}$. Така доказахме следното:

Твърдение 8. Ако кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са параболи, те са хомотетични (Фиг. 4).

Към хомотетичността, описана в твърдение 8, трябва да се добави и уточнението, че считаме параболическите криви $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ за хомотетични и в случаите, когато са еднакви. Параболите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви, когато $\bar{c}$ се получава чрез трансляция от $\bar{k}(O)$, т.е. при $h_p = 1$. Според (39) последното условие е изпълнено точно когато е в сила равенството

$$(45) \quad a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

Кривите $\bar{k}(O)$ и $\bar{c}$ са еднакви и в случая, когато са централно симетрични, т.е. при $h_p = -1$. Според (39) последното условие е изпълнено точно когато е в сила равенството

$$(46) \quad 4x_0y_0z_0 + a_{11}x_0 + a_{22}y_0 + a_{33}z_0 = 0.$$

От твърдение 8 следва, че при произволни реални стойности на константите k , a_{11} , a_{22} и a_{33} уравнението (3') задава парабола, която е хомотетична на предварително зададената описана парабола $\bar{k}(O)$. Следователно всички параболы в равнината на $\triangle ABC$, които имат уравнение (3'), са хомотетични помежду си. Последното наблюдение означава още, че всички параболы в равнината, които имат успоредни оси, са хомотетични.

Накрая ще отбележим, че описаните идеи за изследване на разпределянето на коничните сечения от равнината на $\triangle ABC$ в хомотетични класове позволяват за дадена описана крива $\bar{k}(O)$ при всеки избор на константите a_{11} , a_{22} , a_{33} и k да се построи съответната хомотетична на $\bar{k}(O)$ крива $\bar{c}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.
 Матеев, А. (1979). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.
 Моденов, П. С. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Изд. Московского университета.
 Станилов, Г. (1979). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.

HOMOTHETIC CONICS IN THE PLANE OF A TRIANGLE

Abstract. The present paper considers a method for the classification of the conics in the plane of a triangle into classes of homothetic curves. The classes are determined by the circumscribed conics of the triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS
 Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
 1113 Sofia, Bulgaria
 E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
 31, Sajko Saev Street
 Lovech, Bulgaria
 E-mail: vnenkov@mail.bg