„ВЫХОД В ПРОСТРАНСТВО“ С ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

Мария Шабанова, Светлана Котова

Резюме. В статье представлены методические приемы использования возможностей интерактивных геометрических сред в создании виртуальных инструментальных моделей геометрических объектов. Авторы показывают, как приемы „выход в пространство“ и „уход на плоскость“ могут быть использованы при обучении геометрии для преодоления недостатков развития пространственного воображения и мышления учащихся.

Keywords: Geometry education, interactive geometric environment, virtual model of instrumental type

Традиция разделения школьного курса геометрии на планиметрию и стереометрию восходит к „Началам“ Евклида, которые использовались в качестве учебных пособий в российской школе с 1701 года (год создания школы математических и навигационных наук). В „Началах“ книги I-VI посвящены изложению основ планиметрии, а книги XI-XIII – стереометрии. Недостатки использования такого подхода в качестве основы обучения геометрии в школе состоят:

– в изолированном восприятии свойств плоскостных и пространственных аналогов;

– в длительной оторванности содержания геометрии от области ее практических приложений;

– в трудностях перехода от построения и использования в рассуждениях планиметрических изображений к построению и использованию проекционных чертежей.

Эти недостатки стали осознаваться преподавателями математики и самими учеными практически сразу [1]. Попытки преодоления изолированности изложения планиметрии и стереометрии привели к зарождению идеи фузионизма – слитного изучения нескольких предметов, в частности планиметрии и стереометрии. Впервые эта идея была реализована в 1823 году Н.И. Лобачевским в его пособии „Геометрия“. Сегодня она получила воплощение в содержании нескольких учебных пособий по геометрии для учащихся 7-11 классов (В.А. Гусев, И.Ф. Шарыгин), а также в большинстве пропедевтических курсов геометрии

(В.А. Гусев, Н.С. Подходова, Г.Г. Ходот, В.А. Пантищина и др.). Возможность и даже целесообразность реализации идеи частичного или полного фузионизма при обучении геометрии в школе определена также требованиями действующего стандарта основного общего образования, в котором указывается, что содержание геометрии основной школы должно включать „Наглядные представления о пространственных телах: кубе, параллелепипеде, призме, пирамиде, шаре, сфере, конусе, цилиндре. Примеры сечений. Примеры разверток“ [2, 97].

Однако, практика показывает, что большинство учителей математики отказываются от воплощения данной идеи, выбирая для практической работы учебные пособия с традиционной структурой учебного материала и соответственно, большей дедуктивной стройностью его изложения (Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова).

В этих условиях проблемы, связанные с неразвитостью пространственной интуиции, пространственного воображения и пространственного мышления учащихся, приступающих в 10 классе к изучению стереометрии, преодолеваются за счет использования специальных средств наглядности:

– телескопического стереометрического набора – конструктора, позволяющего создавать каркасные модели пространственных геометрических фигур;

– наборов картонных разверток, позволяющих моделировать многогранные стереометрические поверхности;

– коллекций готовых моделей пространственных тел.

Современные информационные технологии значительно расширяют спектр подобных средств, предоставляя возможность создания виртуальных трехмерных моделей. Эти модели делятся на два основных типа: демонстрационные и инстру-

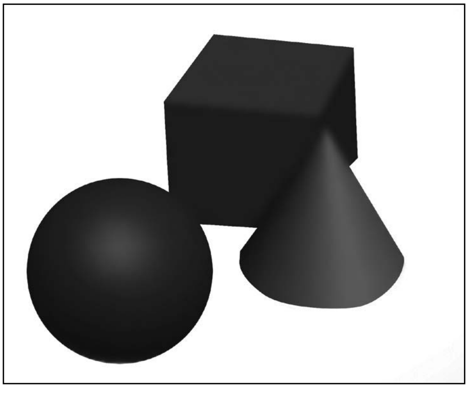

Рис.1 Изображения пространственных тел, созданные средствами трехмерной графики

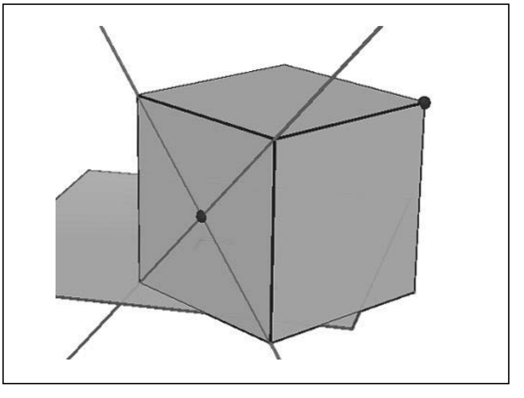

Рис. 2 Изображение куба, созданное средствами Cabri 3D

ментальные. *Модели демонстрационного типа* – это изображения пространственных фигур, созданные с помощью трехмерной графики (рисунок 1) *Модели инструментального типа* – двумерные проекционные изображения пространственных фигур, допускающие изменение ракурса изображения, дополнительные построения и исследования (рисунок 2). Создание таких моделей предоставляют некоторые из интерактивных геометрических сред (ИГС): „Живая математика" (русифицированная версия программы The Geometer,s Sketchpad), Cabri 3D. В этом же направлении движутся разработчики GeoGebra (Beta версия 5.0 этой программы снабжена режимом 3D, который, однако, нуждается в серьезной доработке).

Именно виртуальные модели инструментального типа являются наиболее интересными с методической точки зрения, так как могут выступать средством реализации таких методических приемов как „выход в пространство" и „уход на плоскость".

Остановимся на рассмотрении этих методических приемов и виртуальных средств их поддержки более подробно.

Прием „выход в пространство", осуществляемый с использованием ИГС, может рассматриваться в двух аспектах: техническом и содержательном. С технической точки зрения это преобразование двумерных виртуальных моделей в трехмерные за счет добавления таких эффектов, как: вращение; правильное изображение скрытых элементов; задание пространственного фона (рисунок 3).

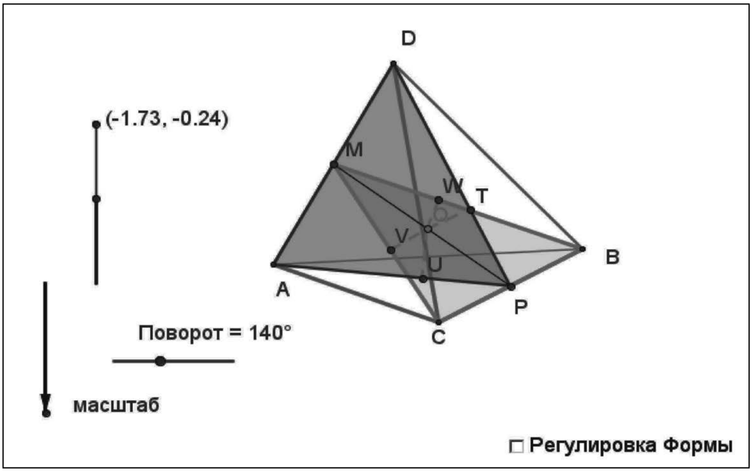

Рис. 3. Динамическое проекционное изображение правильного тетраэдра с двумя бисекторными сечениями, центром вписанной сферы и точками касания сферой граней, созданное средствами GeoGebra 4.0

С содержательной точки зрения – это постановка перед учащимися задачи или серии задач, решение которых явно или неявно требует преобразования или дополнения планиметрического образа задачной ситуации пространственным.

Задача 1. Можно ли расположить четыре точки так, чтобы все отрезки, с концами в этих точках были равными?

Так как условием данной задачи не определена явная принадлежность или не принадлежность четырех точек одной плоскости, то задачу можно рассматривать и как планиметрическую (в этом случае она не имеет решения) и как стереометрическую (четыре точки можно расположить в вершинах правильного тетраэдра).

Задача 2 (теорема Гаспара Монжа). Докажите, что для трех произвольных окружностей, каждая из которых не лежит целиком внутри другой, точки пересечения общих вершин касательных к каждой паре окружностей лежат на одной прямой (рисунок 4).

Особенностью данной задачи является необходимость „выхода в пространства“ для логического обоснования сформулированного планиметрического факта. Для этого надо преобразовать планиметрическую конфигурацию, описанную в условии задачи в стереометрическую. Вместо трех окружностей рассмотреть три сферы с теми же центрами и радиусами, а вместо касательных – конические поверхности с соответствующими образующими. Тогда очевидно, что плоскость, содержащая центры сфер, и плоскость, касающаяся поверхностей конусов, пересекаются по прямой, проходящей через вершины этих конусов, – точки пересечения касательных (рисунок 5).

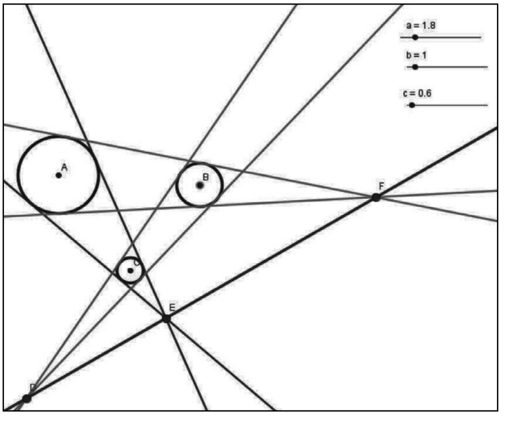

Рис. 4 Динамическая иллюстрация к теореме Г.Монжа, созданная средствами GeoGebra 4.0

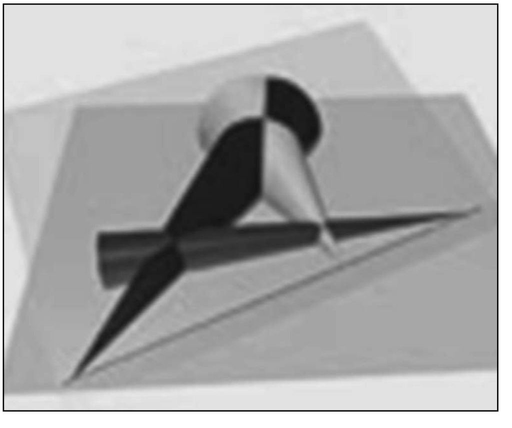

Рис. 5 Иллюстрация к доказательству теоремы Г.Монжа, созданная в трехмерной графике

Задача 3. Сравните условие, ход и результаты решения задач:

а). В четырехугольнике $ABCD$ со сторонами $BC = 14$ и $DA = 12$ проведены диагонали AC и BD. Точки M, N, Q и P являются соответственно серединами отрезков BD, CD, CA и BA. Установите вид и найдите периметр четырехугольника $MNQP$.

б). В пирамиде $ABCD$ точки M, N, Q и P являются соответственно серединами ребер BD, CD, CA и BA. Установите вид и найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $BC = 14$ и $DA = 12$.

Решение обеих задач требует построения одного и того же чертежа (рис 6). Только в первом случае он рассматривается как планиметрический, а во втором как проекционный. Однако эти различия не оказывают существенного влияния на ход и результаты их решения.

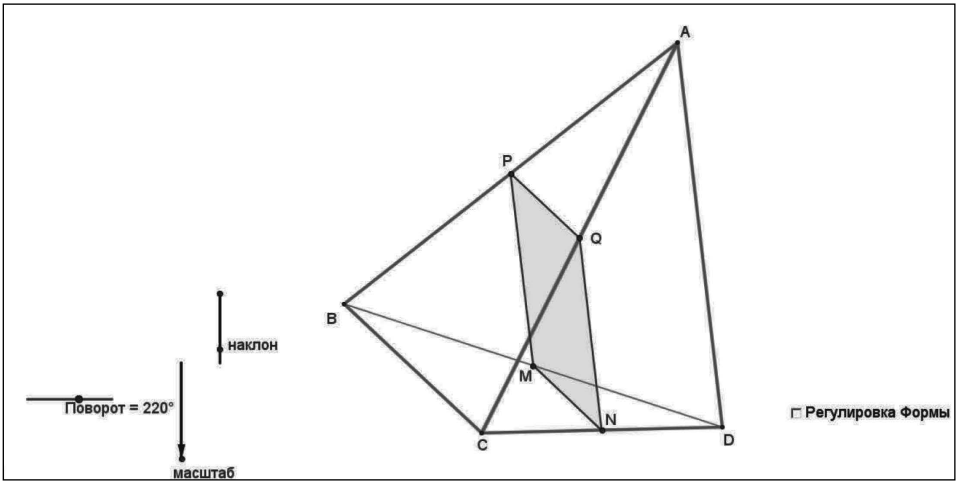

Рис. 6 Динамический чертеж к условиям задач 3а и 3б, выполненный средствами GeoGebra 4.0

Представленный примерами трех задач, прием „выход в пространство“ может широко использоваться на первых этапах обучения стереометрии в 10 классе как основа установления аналогии между планиметрией и стереометрией. Так, например, данный прием может быть использован для постановки задачи 4, демонстрирующей учащимся ограниченность выразительных возможностей понятийного аппарата планиметрии для описания всего многообразия взаимного расположения прямых в пространстве.

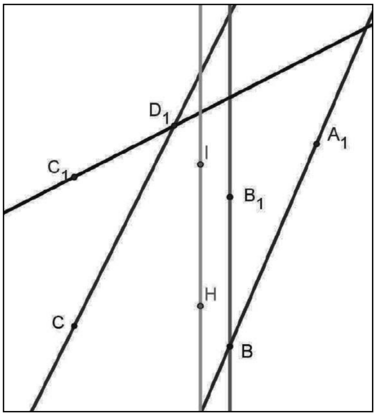

Рис. 7 Изображение прямых плоскости, выполненное средствами GeoGebra 4.0

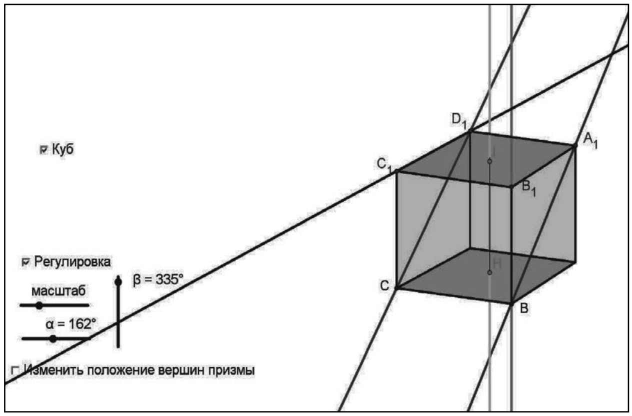

Рис. 8 Изображение прямых в пространстве, выполненное средствами GeoGebra 4.0

Задача 4. Определите взаимное расположение прямых, рассматривая один и тот же динамический чертеж в режимах 2D (рисунок 7) и 3D (рисунок 8).

Прием „выход в пространство“ может быть использован также для постановки задач (например, задачи 5), включающих учащихся в творческую деятельность конструирования утверждений, являющихся пространственными аналогами теорем планиметрии, и проверки их справедливости методом компьютерного эксперимента с виртуальными моделями геометрических конфигураций.

Задача 5. Проверьте построениями в ИГС, сохраняется ли справедливость следующей планиметрической теоремы в стереометрии: „Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую“. Сформулируйте утверждения, которые могут рассматриваться как пространственные аналоги этой планиметрической теоремы. Проверьте их справедливость построениями динамических изображений в ИГС.

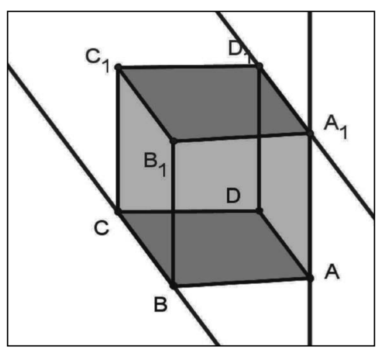

Рис. 9 Контрпример, иллюстрирующий невозможность переноса теоремы из задачи 5 в стереометрию

Результатом решения данной задачи являются следующие динамические чертежи, иллюстрирующие перенос теоремы в стереометрию (рисунок 9) и ее пространственные аналоги (рисунки 10 и 11).

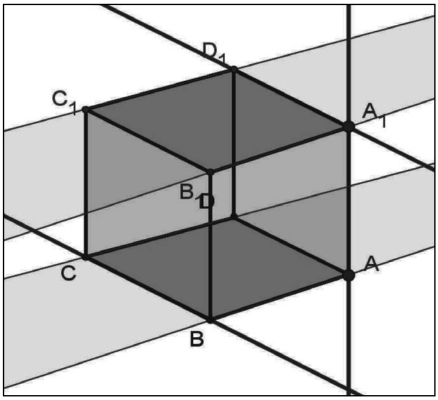

Рис. 10 Иллюстрация утверждения: «Если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую»

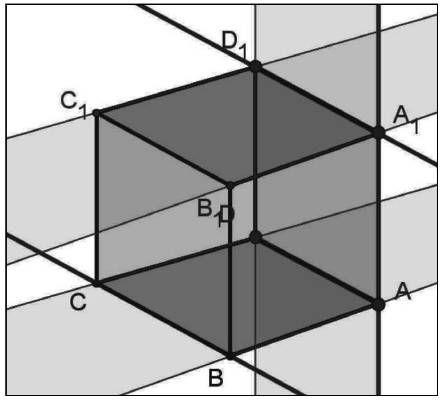

Рис. 11 Иллюстрация утверждения: «Если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоско-стей, то она пересекает и другую»

Прием „уход на плоскость“ является обратным по отношению к приему „выход в пространство“. С технической точки зрения он обеспечивается возможностью преобразование трехмерных инструментальных моделей в двумерные за счет:

– возможности рассмотрения виртуальных 3D моделей в различных ракурсах, в том числе и в ракурсе, при котором значимая для решения задачи часть изображения отображается без искажений;

– возможности построения средствами некоторых ИГС развертки виртуальной 3D модели.

С методической точки зрения данный прием представляет собой постановку перед учащимися задачи, решение которой явно или неявно требует сведения стереометрической задачи к планиметрической или выделения из нее планиметрической подзадачи или серии подзадач путем построения вспомогательного сечения, проецирования элементов геометрической конфигурации на выбранную плоскость или построения развертки.

Проиллюстрируем возможности данного приема конкретными примерами.

Задача 6. Два скрещивающихся ребра тетраэдра имеют длины 4 и 12, а остальные ребра – 7. Найдите расстояние от центра вписанной в тетраэдр сферы до его наибольшего ребра.

Конструктивный способ решения данной задачи требует построения на проекционном чертеже изображений искомых расстояний с последующим использованием в качестве опоры рассуждений выносных чертежей. При решении данной задачи с использованием ИГС построение выносных чертежей может быть заменено по-

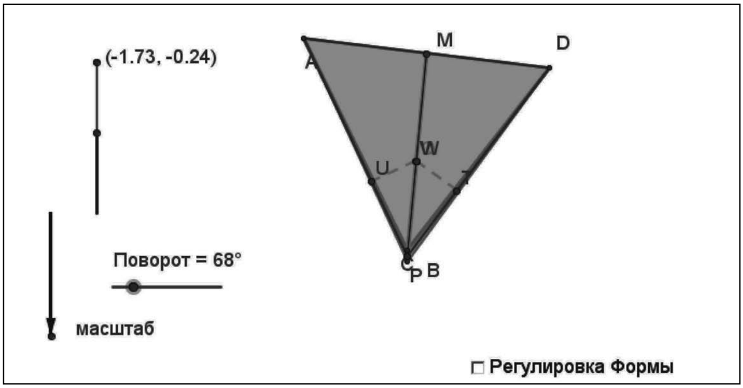

Рис. 12 Результат поворота динамического изображения, представленного на рисунке 3

иском подходящего ракурса рассмотрения виртуальной модели (рисунок 3). Так „уход на плоскость“ может быть обеспечен вращением чертежа, до достижения положения, при котором одно из бисекторных сечений будет изображаться без искажения (рисунок 12).

Задача 7. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник, в котором $AC = CB = a$. Точка D_1 делит ребро A_1C_1 в отношении 1 : 2, считая от вершины A_1. Найдите расстояние между прямыми CC_1 и BD_1.

Основой решения данной задачи может быть утверждение о равенстве расстояний между скрещивающимися прямыми расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскость, перпендикулярную одной из них (в данном случае, плоскость основания прямой призмы). Построение динамического чертежа в ИГС к условию задачи (рисунок 13) позволяет использовать возможность вращения изображения для „ухода на плоскость проецирования“, т.е. перехода к рассмотре-

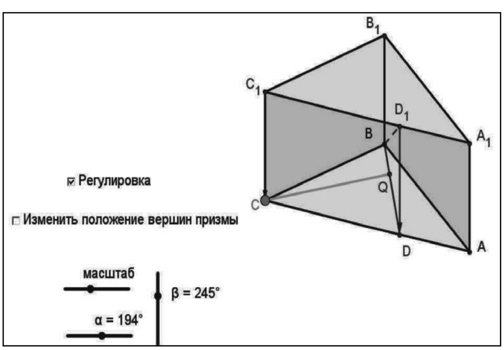

Рис.13 Динамический чертеж к решению задачи 7 методом проекций, выполненный в GeoGebra 4.0

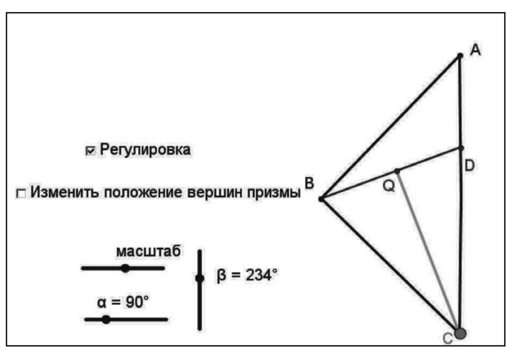

Рис. 14 Изображение плоскости проекции, полученное вращением призмы

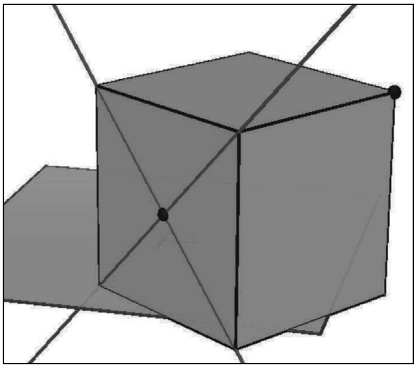

Рис. 15 Изображение куба, выполненное в Cadri 3D

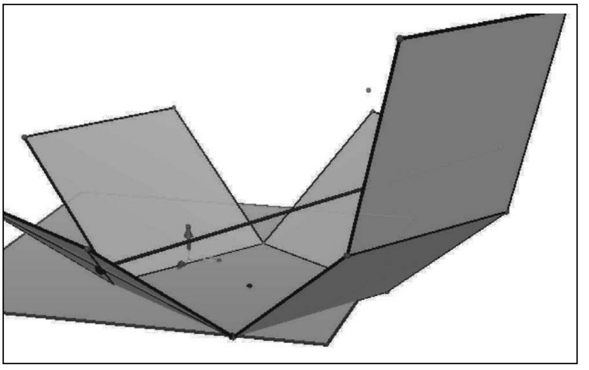

Рис. 16 Процесс разворачивания куба с демонстрацией изменения отрезка, изображающего расстояние между выделенными точками

нию планиметрической задачи на вычислении длины отрезка *CQ* в прямоугольном треугольнике *ABC* (рисунок 14).

Задача 8. Ребро куба равно 2. Найдите расстояние по его поверхности от центра одной из его граней до вершины, противолежащей грани.

Тот факт, что в условии задачи 8 речь идет о вычислении расстояния по поверхности подсказывает, что при ее решении полезным может являться рассмотрение развертки куба. Возможности преобразования пространственной многогранной поверхности в ее развертку предоставляет ИГС Cabri 3D. Ключевые моменты разворачивания пространственной поверхности средствами этой ИГС представлены на рисунках 15, 16 и 17. Последующее вращение развертки позволяет добиться изображения, при котором удобно производить вычисления длины искомого расстояния – отрезка заключенного между выделенными точками поверхности (рисунок 18).

Соединение технических возможностей ИГС по созданию виртуальных 3D моделей инструментального типа с методическими достоинствами „выхода в пространство“ и „ухода на плоскость“ позволяет подойти к решению проблемы развития пространственного мышления учащихся. В то время как остальные виды средств наглядности, лишь компенсируют недостаток его развития у учащихся.

ЛИТЕРАТУРА

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах – Т.2 Геометрия: пер. с нем. Под ред. В.Г. Болтянского – 2-е изд. – М.: Наука, 1987 – 416

Сборник нормативных документов/ Сост. Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев – М.: Дрова, 2004 – 443 с.

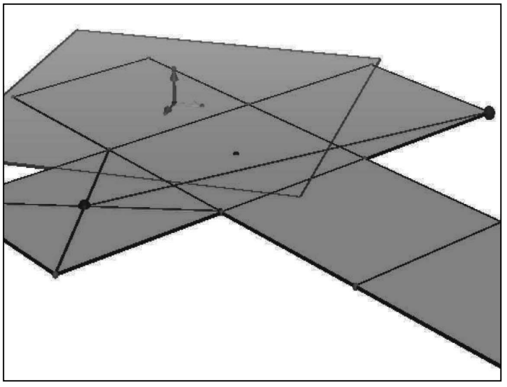

Рис .17 Проекционное изображение развертки куба, выполненное в Cabri 3D

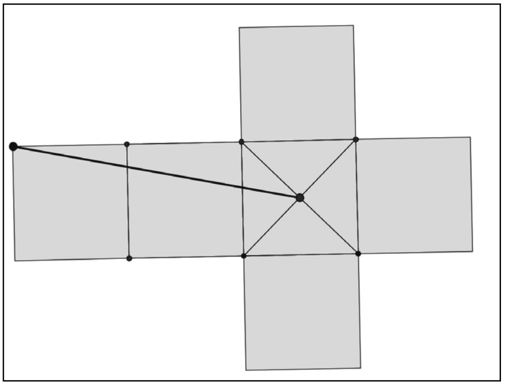

Рис. 18 Изображение развертки в плоскости чертежа (без искажения)

Grozdev, S (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia, ADE.

„EXIT INTO THE SPACE“ BY INTERACTIVE GEOMETRIC ENVIRONMENT

Abstract. The paper presents a methodological approach to the applicable possibilities of interactive geometric environment for the creation of virtual instrumental models of geometric objects. The authors show how „exit into the space“ and „going to the plane“ could be used in Geometry education to overcome defects in the development of spatial imagination and thinking of students.

Maria Shabanova
✉ Professor, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Computer Science
17, „Naberezhnaja Severnoj Dvini“ Street
163060, Arkhangelsk, Russia
E-mail: m.shabanova@narfu.ru

Svetlana Kotova
✉ Associated Professor, PhD in Pedagogy
Institute of Mathematics and Computer Science
17, „Naberezhnaja Severnoj Dvini“ Street
163060, Arkhangelsk, Russia
E-mail: kotovasn22@bk.ru