Educational Matters
Научно-методически статии

ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕТЕВОЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ПРОЕКТ УЧАЩИХСЯ В РАМКАХ MITE

[1)]Мария Шабанова, [2)]Марина Белорукова,
[3)]Роза Атамуратова, [4)]Веселин Ненков
[1)]Московский институт открытого образования – Москва (Россия)
[2)] Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение „Средняя школа № 8“ – Архангельск (Россия)
[3)]Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей с углубленным изучением различных предметов – Актау (Казахстан)
[4)]Технически колеж - Ловеч

Аннотация. Одной из задач Международного проекта MITE (Методики и информационные технологии в образовании) является создание условий для выявления и развития молодых талантов. Среди зарекомендовавших себя форм работы является Международный конкурс «Математика и проектирование». Конкурс пользуется большой популярностью среди учащихся Болгарии, Казахстана и России. В 2017 году второй раз в программу конкурса была включена номинация «Сетевые исследовательские проекты». Первое ме сто в этой номинации занял проект «Математическая мозаика», подготовленный объединенной командой учащихся из трех стран: Болгарий, Казахстана и России. Данная статья подводит итоги работы учащихся и представляет методику организации их совместной работы по подготовке проекта.

Keywords: secondary education; student; geometry; research; international network collaboration; dynamical geometry software; cloud service

Предыстория

Одной из важнейших задач системы общего среднего образования является выявление учащихся, обладающих повышенными способностями и склонностью к деятельности в сфере математики. Болгария имеет богатый опыт такой работы (Grozdev, 2017). Основой его является вовлечение учащихся в разнообразные турниры, олимпиады и конкурсы, предоставление учащимся возможности заниматься математикой под руководством на только школьных учителей, ученых.

Исследовательский проект «Математическая мозаика», о котором пойдет речь в данной статье, был организован по просьбе международной команды учащихся, которая сложилась в ходе выполнения предыдущего проекта «Геометрический Scrabble в облаках». Об этом проекте мы писали в статьях (Shabanova, 2017) и (Gorskaya, 2016). Учащиеся и их научные руководители были очень довольны итогами совместной работы и хотели продолжить сотрудничество. Состав команды практически не изменился. Россию представляли Дарья Коптева, Ксения Горская; Казахстан – Ермекбаев Асхат, Жетиру Арман, Бермухамедов Азат, Кошер Салтанат; Болгарию –Лили Стефанова, Ирина Христова, Александра Йовкова.

Каждая группа участников образовывала свою подкоманду. Для организации взаимодействия подкоманд в условиях их территориальной разобщенности придуманасетевая игра «Математическая мозаика». Действие игры разворачивалось на облачном сервисе Google. Игра началась 25 сентября 2016 года. Каждой команде была предложена для решения своя стартовая задача. Команды должны были решить ее, поделиться результатами с остальными участниками проекта и общими усилиями найти идею, которая объединяет все три задачи – идею разыскания и использования инвариантной точки.

Определение. Инвариантной будем называть точку пересечения тех или иных линий, положение которой на координатной плоскости не зависит от изменения значений указанного набора параметров, задающих геометрическую конфигурацию.

Эту идею и предполагалось развить в дальнейшем. Подкоманды должны были собрать как можно больше сведений о выявленных инвариантах, постараться открыть их новые свойства. Затем, на основе полученных знаний международная команда должна была составить и решить задачу, объединяющую исходные задачи в одну, которую мы назвали “математическим узором инвариантных точек”.

Стартовые задачи и результаты их решения.

Задача Болгарии: *На сторонах* AB *и* CB *треугольника* ABC *выбраны точки* M *и* N *так, что* $AM:MB=m$*;* $CN:NB=n$*. Прямая* MN *пересекает* AC *в точке* T*. Исследуйте зависимость положения точки* T *от вида треугольника. Получите формулу для выражения отношения* $AT:TC$*.*

Задача России. *По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки A и B. Доказать, что существует такая точка плоскости, которая во все моменты времени равноудалена от них.*

Задача Казахстана. *Построить окружность, которая касается данной окружности и проходит через две данные точки плоскости, содержащие эту окружность.*

Опишем ход и результаты решения каждой из стартовых задач.

Ответом в задаче Болгарии является отношение $AT : TC = m : n$. Этот ответ следует непосредственно теоремы Менелая (Kokseter & Greitzer, 1978). Если точки M и N движутся по отрезкам (прямым) AB и CB соответственно, значения числа m и n меняются, но если отношение $m : n$ остается постоянным, то точка T является инвариантом относительно движения точек M и N (рис. 1).

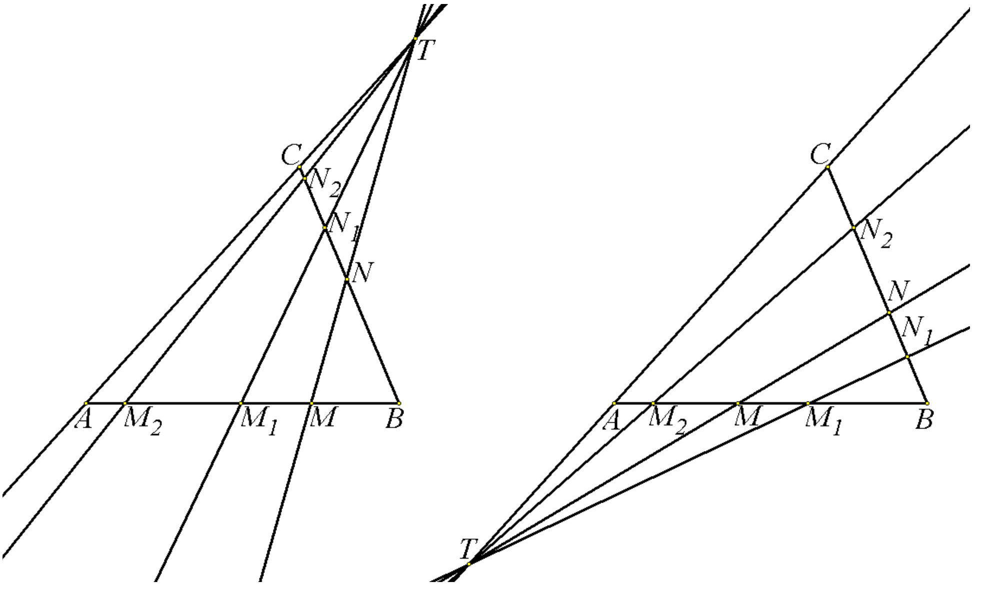

Рис. 1

Требуемым результатом решения задачи России является доказательство существования инвариантной точки. Для этого необходимо найти способ конструирования этой точки, на основе разыскания и анализа некоторых ее свойств. Если M точка пересечения серединных перпендикуляров s и s_1 отрезков AB и A_1B_1 (Рис. 2), то $\Delta MAB \cong \Delta MA_1B_1$ ($AA_1 = BB_1$,

$MA = MB$, $MA_1 = MB_1$). Следовательно $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle MBB_1$ (Рис. 2). Отсюда следует, что $\Delta MAA_2 \cong \Delta MBB_2$ ($AM = BM$, $AA_2 = BB_2$, $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle MBB_1$) (Рис. 2). Таким образом $MA_2 = MB_2$ и точка M находится на серединном перпендикуляре s_2 к отрезку A_2B_2 (рис. 2).

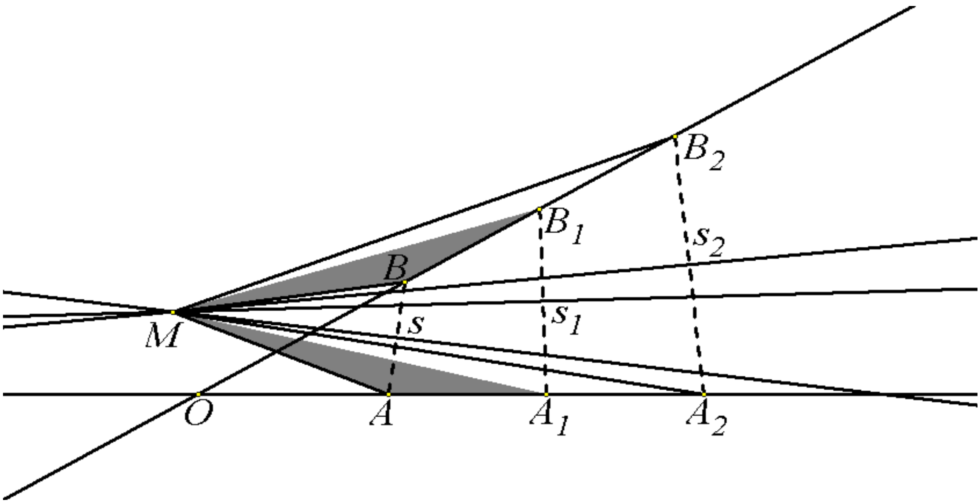

Рис. 2

Точка M является общей точкой серединных перпендикуляров к любым двум отрезкам, полученным в результате движения точек A и B по заданным прямым (Рис. 2). Любопытно, что у точки M есть и другие интересные свойства. Оказывается, что описанные окружности для треугольников OAB , OA_1B_1 , ì $_2$ $_2$ и т.д. проходят через точку M (Рис. 3). Отсюда следует, что M является точка Микеля (Kokseter & Greitzer, 1978) для всех полных четырехугольников ABB_1A_1 , ABB_2A_2 , $A_1B_1B_2A_2$ и т.д. (рис. 3). Таким образом, инвариант – точка M , – в задаче России связана с теоремой Микеля для полного четырехугольника. Легко увидеть еще, что точка M находится на внешней или внутренней биссектрисе угла AOB в зависимости направления движения точек A и B по отношению к точек O пересечения прямых (рис. 3).

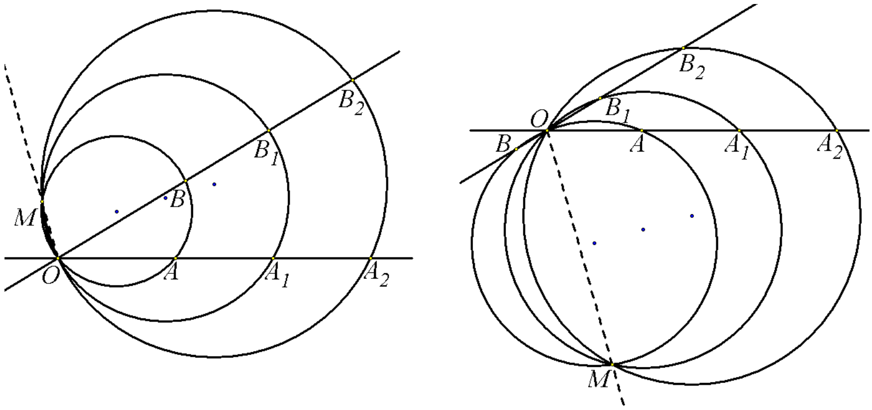

Рис. 3

Задача Казахстана является одной из десяти случаев задачи Аполлония (Argunov & Balk, 1957). Одно из решений этой задачи можно получит методом инверсии. Это наиболее типичный метод решения большого количества задач Аполлония. Подкомандой Казахстана был предложен другой подход. Он состоится в следующем.

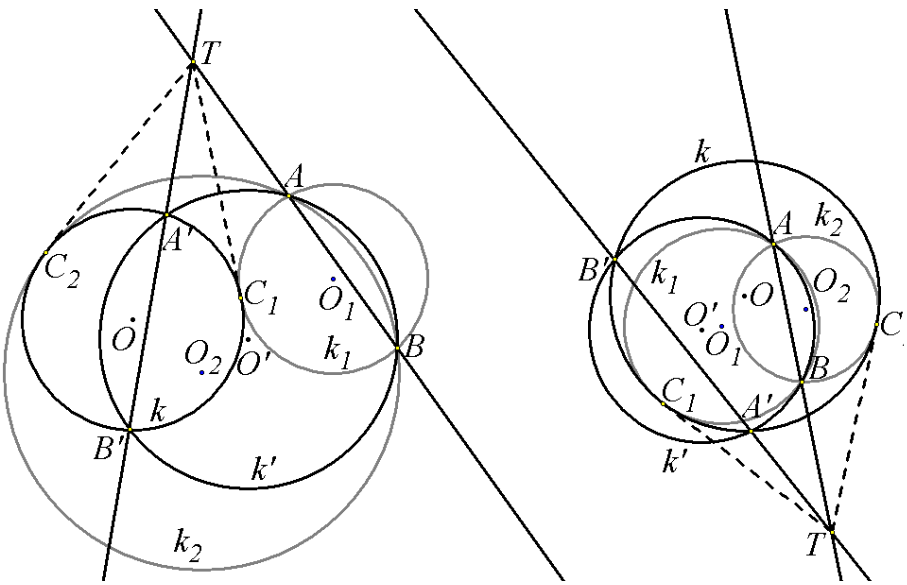

Рис. 4

Рассмотрим произвольную окружность k', которая проходит через заданные точки A и B и пересекает заданную окружность k в точках A' и B' (Рис. 4). Тогда точка $T = AB \cap A'B'$ (рис. 4) является инвариантом относительно выбора окружности k'. Ее разыскание является ключом к решению задачи. Касательные TC_1 и TC_2 к данной окружности k определяют точки C_1 и C_2, в которых касаются ее искомые окружности k_1 и k_2 (рис. 4). Точка T является радикальным центром всех троек окружностей, содержащих данную окружность k и две произвольные окружности, проходящие через две данные точки A и B.

Так получилось, что каждая из трех стартовых задач связана именем одного известных математиков: Менелай, Микель, Аполлоний. Каждая задача содержит одну инвариантнуюточку.

Поиски «математического узора инвариантных точек».

В ходе дальнейшей работы командами было собрано и изучено большое количество материалов, составлено и решено много новых задач. Так подкомандой Болгарии были составленные задачи о вписанных и вневписанных окружностях треугольника. Основным элементом решения этих задач был теорема Менелая. В стартовой задачи России инвариантом оказалась точка Микеля, что явилось причиной для изучения различных свойств четырехугольника, которые связаны с точкой Микеля. Так учащиеся узнали, что центры описанных окружностях для четырех треугольников, образовавшихся четырьмя прямых, лежат на окружность – окружность Штейнера – проходящая через точку Микеля. Они также узнали, что четыре прямые в общем положении касаются одной параболой, фокусом который является точка Микеля. Стартовая задача привела подкоманду из Казахстана к рассмотрению и решению некоторых задач касания окружности и конических сечений.

Кульминационным моментом всей этой работы явился поиск такой задачи, решение которой опирается на результаты решения всех трех стартовых задач. Можно сказать, что эта часть работы была самой важной для того, чтобы исследование могло считаться завершенным. После очень многих размышлений, длительной переписки и споров была составлена общая задача – «математический узор инвариантов». Эта общая задача и ее решение представлены в отдельной публикации, автором которой являются сами ученики - участники проекта.

Заключение

В заключении нам бы хотелось отметить некоторые особенности проведенного учащимися исследования. Стартовые задачи были подобраны таким образом, чтобы вызвать у них необходимость использования средств и методов динамической математики (Grozdev, Sergeeva & Shabanova, 2016). Речь идет о компьютерных экспериментах. Они использовались для визуализации условий стартовых задач, постановки новых задач, обнаружения инвариантов, проверки гипотез, контроля аналитических преобразований, дедуктивных рассуждений и расчетов. Компьютерные эксперименты проводились с использованием программ образовательного назначения: GeoGebra и Geometer'sSketchpad, а также профессиональной программы Maple. Эта техника использовалась и при реализации первого сетевого исследовательского проекта. Мы считаем ее весьма продуктивной, как с точки зрения повышения доступности математических исследований для учащихся разного возраста и уровня математической подготовки, так и с точки зрения их вовлечения в дополнительные занятия математикой.

NOTES\БЕЛЕЖКИ

1. Michal Rol´ınek, Le Anh Dung (2014). The Miquel Points, Pseudo-circumcenter and Euler-Poncelet Point of a Complete Quadrilateral, *Forum Geometricorum*, Volume 14, 145 – 153. (URL: http://forumgeom.fau.edu/FG2014volume14/FG201413.pdf).

REFERENCES\ЛИТЕРАТУРА

Argunov, B. I. & M. B. Balk (1957). *Geometric constructins in the plane*. Moscow: Uchpedgiz, 268 pp. [Аргунов, Б. И. & Балк, М. Б. (1957). *Геометрические построения на плоскости*. Москва: Учпедгиз, с. 268].

Gorskaya, K., D. Kopteva, D. Mikurov, E. Mudebaev, K. Muhambetov, A. Temirhanov, L. Stefanova, I. Hristova & R. Ivanova (2016). Some trajectories determined by isosceles triangles, *Mathematics and Informatics*, 6, 572 – 588. [Горская, К., Д. Коптева, Д. Микуров, Е. Мудебаев, К. Мухамбетов, А. Темирханов, Л. Стефанова, И. Христова & Р. Иванова. (2016). Некоторые траектории, которые определены равнобедренными треугольниками, *Математика и информатика, 6*, 572 – 588].

Modenov, P. (1969). *Analytical geometry*. Moscow: Moscow University. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия*. Москва: Московский университет].

Sergeeva T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU. [Сергеева, Т. М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ].

Kokseter, G. S. M. & S. P. Greitzer (1978). *New meetings with Geometry*. Moscow: Nauka, pp. 225. [Коксетер, Г. С. М. & С. П. Грейтцер (1978). *Новые встречи с геометрией*. Москва: Наука, с. 225].

Shabanova, M., M. Belorukova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). First International net research student project in the frames of "MITE", *Mathematics and Informatics*, 6, 567 – 571. [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков. (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках проекта MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571].

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE.

Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt.* (4th ed.). Sofia: Publ. House "Iztok-Zapad". (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages. [Георгиева М. & С. Гроздев (2016). *Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.). София: Изток – Запад. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 страници].

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000].

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the triangle medians*. Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000].

SECOND INTERNATIONAL NET RESEARCH STUDENT PROJECT IN THE FRAMES OF MITE

Abstract. One of the goals of the International project MITE (Methods and Information Technologies in education) is to create conditions for identification and development of young talents. Among the active forms with proven efficiency is the International contest "Mathematics and Projecting". The contest is very popular in Bulgaria, Kazakhstan and Russia. In 2017 the nomination "Network Research Projects" was included in the contest program for a second time. The project "Mathematical Mosaic" was awarded first place

in this nomination. The project was elaborated by a combined international group of students from three countries: Bulgaria, Kazakhstan and Russia. The present paper summarizes details of the students' collaboration and presents the organizational methodology in their common work during the project preparation.

✉ **Prof. Maria Shabanova, DSc.**
Moscow Institute of Open Education
6, Aviatsionnyi Per.
125167 Moscow, Russia
E-mail: shabanovamv@mioo.ru

✉ **Ms. Marina Belorukova, teacher**
Public Secondary School № 8
30, Avenue Obvodni kanal
163002 Arkhangelsk, Russia
E-mail: marina.9149@yandex.ru

✉ **Ms. Roza Atamuratova, teacher**
Regional Special Boarding School for Gifted Children with In-Deep Studying of Various Subjects
32 b, Microdistrict
130000 Aktau, Kazakhstan
E-mail: r.atamuratova@mail.ru

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg