

Приложни изследвания
Applied Researches

ВРЪЗКИТЕ СЪБИРАНЕ–ИЗВАЖДАНЕ И УМНОЖЕНИЕ–ДЕЛЕНИЕ И ПРОПЕДЕВТИКАТА НА ПОНЯТИЕТО УРАВНЕНИЕ В НАЧАЛНОТО ОБУЧЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА

Иванка Минчева

Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. В статията се разглеждат връзките между обратните операции събиране–изваждане и умножение–деление и тяхното приложение при въвеждане на правилата за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция. Идеите са систематизирани и са илюстрирани със системи задачи от училищния курс по математика в началните класове.

Keywords: interrelation, arithmetic operation, unknown component, equation, system of problems

Въведение

Заедно с аритметичните знания в началния училищен курс по математика се въвеждат и задачи с алгебрично съдържание – пресмятане стойност на алгебрични изрази, решаване на неравенства и уравнения. За последния вид задачи често се използва наименованието – задачи за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция. Тази група задачи е и важна част от основното съдържание на алгебричната пропедевтика.

Поради връзката между задачите за намиране на сбор, разлика, произведение и частно и съответните задачи за намиране на неизвестно събираемо, умляемо, умалител, множител, делимо и делител тя естествено се прилага за преход от аритметични към алгебрични знания. От друга страна, връзката между обратните операции, както и аналогията между връзките събиране–изваждане и умножение–деление са основни математически факти, които се изясняват на достъпно ниво и в началния училищен курс по математика. Ето защо основните идеи компоненти при изучаване на задачите за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция, са:

- Връзка между операциите събиране и изваждане и умножение и деление.
- Връзка между задачите за намиране на сбор, разлика, произведение и частно на естествени числа и съответните задачи за намиране на неизвестен компонент, т.е. зависимостите:

$$a + b = ? \rightarrow a + x = b, x = ?$$

$$a - b = ? \rightarrow x - a = b, x =$$

$$a - x = b, x = ?$$

$$a \cdot x = ? \rightarrow x \cdot a = b, x = ?$$

$$a : b = ? \rightarrow x : a = b, x = ?$$

$$a : x = b, x = ?$$

– Аналогия между свойствата на операциите събиране и умножение и изваждане и деление.

– Аналогия между връзките събиране–изваждане и умножение–деление.

Целта на настоящата разработка е да предложи възможности за използване на тези идеи за въвеждане, разбиране и усвояване на задачите за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция в началното обучение по математика.

Мотивация

Пресмятането на сбор, разлика, произведение и частно на естествени числа обикновено не затруднява учениците. В същото време се оказва, че връзките събиране–изваждане, умножение–деление, както и аналогията между тях не се използват достатъчно ефективно в реалната учебна практика дори и при разглеждане на свързаните с тях задачи с алгебрично съдържание. В резултат на това учениците не откриват тези връзки и аналогията между тях, нямат опит в използването им за рационални методи на решаване на големи и важни за обучението групи задачи. Така се стига и до неумение за решаване или за несъзнателно решаване на задачи за намиране на неизвестен компонент и следователно за неуспешен преход към обучението по математика в среден и горен курс на обучение, където понятието уравнение е основно математическо понятие, изучават се различни групи уравнения и различни начини за тяхното решаване. Ето защо разглеждането на този проблем е актуално и необходимо. Идеите, изложени по-долу, са опит за преодоляване на този проблем.

Някои бележки за идеите компоненти

– Връзката между задачите за намиране на сбор, разлика, произведение и частно на естествени числа и съответните задачи за намиране на неизвестен компонент е изяснена в редица публикации (Минчева, 2003), (Минчева, 2010). Затова тук няма да се спираме на този въпрос.

– Връзката между операциите събиране и изваждане е разглеждана в (Минчева, 2006). Предложените там идеи са вложени и доразвити в Таблици 1, 2 и 3.

– Аналогията между свойствата на операциите събиране и умножение и изваждане и деление е част от аналогията между връзките събиране–изваждане и умножение–деление. Последната е изследвана в (Минчева, 2006) и е основа за въ-

веждане на правилата за намиране на неизвестно събираемо, умаляемо, умалител, множител, делимо и делител чрез системи задачи, представени в Таблицы 1, 2 и 3.

Системи задачи за въвеждане на правилата за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция

Използвайки всички по-горе споменати идеи, в статията се предлага последователност от основни системи задачи, чрез които достъпно се достига до аритметичните правила за решаване на задачи от вида:

$$a + x = v, x = ?$$

$$x - a = v, x = ?$$

$$a - x = v, x = ?$$

$$x \cdot a = v, x = ?$$

$$x : a = v, x = ?$$

$$a : x = v, x = ?$$

Тук с a и v са означени дадени числа или числови изрази, а с x – неизвестен компонент (събираемо, умаляемо, умалител, множител, делимо или делител).

Всяка конкретна задача е представителна и може да се замени със задача от същия тип с променени несъществени свойства – други числа, замяна на дадено число с числов израз и др. Изборът на задачи зависи от етапа на обучение, от познатите аритметични знания (изучени групи числа, свойства, операции и др.) до момента и от знанията, които предстои да бъдат усвоени. Тук изборът на конкретни числа е формален, защото целта на разработката не е пресмятане с числа, а разбиране и усвояване на решението на дадена група задачи.

Теоретичните основи и приложението им в реалната учебна практика са представени в Таблицы 1, 2 и 3 (Виж приложението). Там се проследяват етапите както за въвеждане на даден вид аналогични задачи, така и за откриване и формулиране на правилото за тяхното решаване.

Конкретизация на идеите от Таблицы 1, 2 и 3 са предложените по-долу примерни системи задачи за въвеждане на правилата за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция.

Примерни групи задачи за въвеждане правилата за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестно събираемо (Таблица 1)

Задача 1.1. *Като използвате дадените сборове, пресметнете разликите.*

$$2 + 3 = 5 \quad 4 + 5 = 9 \quad 25 + 3 = 28$$

$$5 - 3 = ? \quad 9 - 5 = ? \quad 28 - 3 = ?$$

$$5 - 2 = ? \quad 9 - 4 = ? \quad 28 - 25 = ?$$

Задача 1.2. Пресметнете сборовете и съответните разлики.

$$\begin{array}{lll} 2 + 3 = ? & 4 + 5 = ? & 25 + 3 = ? \\ 5 - 3 = ? & 9 - 5 = ? & 28 - 3 = ? \\ 5 - 2 = ? & 9 - 4 = ? & 28 - 25 = ? \end{array}$$

Задача 1.3. Петьо скрил в дясната си ръка 5 червени топчета и в лявата – 3 жълти топчета. Ако изхвърли топчетата в лявата си ръка, колко топчета ще останат в дясната?

Извод 1 (от таблица 1): Ако от сбора на две числа извадим едното, получаваме другото.

Примерни задачи от система 2.

Задача 2.1. Като използвате дадените сборове и съответните разлики, проверете верни ли са равенствата:

$$\begin{array}{lll} 2 + 3 = 5 & 4 + 5 = 9 & 12 + 6 = 18 \\ 5 - 3 = 2 \rightarrow \boxed{2 = 5 - 3} & 9 - 5 = 4 \rightarrow \boxed{4 = 9 - 5} & 18 - 6 = 12 \rightarrow \boxed{12 = 18 - 6} \\ 5 - 2 = 3 \rightarrow \boxed{3 = 5 - 2} & 9 - 4 = 5 \rightarrow \boxed{5 = 9 - 4} & 18 - 12 = 6 \rightarrow \boxed{6 = 18 - 12} \end{array}$$

Задача 2.2. Пресметнете сборовете и съответните разлики и запишете всяко от събираемите чрез сбора и другото събираемо.

$$\begin{array}{lll} 2 + 3 = ? & 4 + 5 = ? & 15 + 4 = ? \\ 5 - 3 = ? \rightarrow \boxed{2 = ? - ?} & 39 - 5 = ? \rightarrow \boxed{34 = ? - ?} & 19 - 4 = ? \rightarrow \boxed{15 = ? - ?} \\ 5 - 2 = ? \rightarrow \boxed{3 = ? - ?} & 39 - 34 = ? \rightarrow \boxed{5 = ? - ?} & 19 - 15 = ? \rightarrow \boxed{4 = ? - ?} \end{array}$$

Задача 2.3. Като използвате дадените сборове, изразете (запишете) всяко от събираемите чрез сбора и другото събираемо.

$$\begin{array}{lll} 2 + 3 = 5 & 4 + 11 = 15 & 28 + 2 = 30 \\ \boxed{2 = ? - ?} & \boxed{4 = ? - ?} & \boxed{28 = ? - ?} \\ \boxed{3 = ? - ?} & \boxed{11 = ? - ?} & \boxed{2 = ? - ?} \end{array}$$

Извод 2 (от Таблица 2): Всяко от двете събираеми може да се представи (запише) като разлика на сбора и другото събираемо.

Примерни задачи от система 3. (текстова задача, задача – математическа диктовка, или задача от вида $a + x = b$).

Задача 3.1. Във ваза има 3 червени и още няколко бели рози. Всички рози във вазата са 5. Колко са белите рози във вазата?

Задача 3.2. Намислих число. Към него прибавих 5 и получих сбор 16. Кое число съм намислил?

Задача 3.3. Намерете неизвестното число (неизвестното събираемо) x ($\square$) в равенството $4 + x = 26$ ($4 + \square = 26$).

Извод 3 (от Таблица 1): Неизвестно събираемо се намира, като от сбора извадим другото, известно събираемо.

Поради аналогията между зависимостите множители–произведение и събираеми–сбор, дейностите и задачите за въвеждане правилото за намиране на неизвестен множител са аналогични на тези за неизвестно събираемо.

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестен множител (Таблица 1)

Примерни задачи от система 1.

Задача 1.1. Като използвате дадените произведения, пресметнете частните.

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 3 = 6 & 4 \cdot 5 = 20 & 25 \cdot 3 = 75 \\ 6 : 3 = ? & 20 : 5 = ? & 75 : 3 = ? \\ 6 : 2 = ? & 20 : 4 = ? & 75 : 25 = ? \end{array}$$

Задача 1.2. Пресметнете произведенията и съответните частни.

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 3 = ? & 4 \cdot 5 = ? & 25 \cdot 3 = ? \\ 6 : 3 = ? & 20 : 5 = ? & 75 : 3 = ? \\ 6 : 2 = ? & 20 : 4 = ? & 75 : 25 = ? \end{array}$$

Задача 1.3. Намерете числото, три пъти по-малко от произведението на числата 5 и 3.

Извод 1 (от таблица 1): Ако произведението на две числа разделим на едното, получаваме другото.

Примерни задачи от система 2.

Задача 2.1. Като използвате дадените произведения и съответните частни, проверете верни ли са равенствата:

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 3 = 6 & 4 \cdot 5 = 20 & 12 \cdot 4 = 48 \\ 6 : 3 = 2 \rightarrow \boxed{2 = 6 : 3} & 20 : 5 = 4 \rightarrow \boxed{4 = 20 : 5} & 48 : 4 = 12 \rightarrow \boxed{12 = 48 : 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 6 : 2 = 3 \rightarrow \boxed{3 = 6 : 2} & 20 : 4 = 5 \rightarrow \boxed{5 = 20 : 4} & 48 : 12 = 4 \rightarrow \boxed{4 = 48 : 12} \end{array}$$

Задача 2.2. Пресметнете произведенията и съответните частни и запишете всеки от множителите чрез произведението и другия множител.

$$\begin{array}{lll} 2 \cdot 3 = ? & 34 \cdot 2 = ? & 15 \cdot 4 = ? \\ 6 : 3 = ? \rightarrow \boxed{2 = ? : ?} & 68 : 2 = ? \rightarrow \boxed{34 = ? : ?} & 60 : 4 = ? \rightarrow \boxed{15 = ? : ?} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 6 : 2 = ? \rightarrow \boxed{3 = ? : ?} & 68 : 34 = ? \rightarrow \boxed{2 = ? : ?} & 60 : 15 = ? \rightarrow \boxed{4 = ? : ?} \end{array}$$

Задача 2.3. Като използвате дадените произведения, изразете (запишете) всеки от множителите чрез произведението и другия множител.

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$4 \cdot 11 = 44$$

$$28 \cdot 2 = 56$$

$$2 = ? : ?$$

$$4 = ? : ?$$

$$28 = ? : ?$$

$$3 = ? : ?$$

$$11 = ? : ?$$

$$2 = ? : ?$$

Извод 2 (от таблица 2): Всеки от двата множителя може да се представи (запише) като частно на произведението и другия множител.

Примерни задачи от система 3. (текстова задача, задача – математическа диктовка, или задача от вида $a \cdot x = v$).

Задача 3.1. Във физкултурния салон на едно училище има топки. В двора на училището има 2 пъти повече топки от тези в салона. Ако топките в двора са 10, колко са топките в салона на училището?

Задача 3.2. Намислих число. Умножих го с 5 и получих произведение 45. Кое число съм намислил?

Задача 3.3. Намерете неизвестното число (неизвестния множител) x ($\square$) в равенството $4 \cdot x = 60$ ($4 \cdot \square = 60$).

Извод 3 (от Таблица 1): Неизвестният множител се намира, като произведението разделим на другия, известен множител.

Целта на всяка от задачите 3.1, 3.2 или 3.3 е:

– Да се въведе и разбере понятието неизвестно събираемо (неизвестен множител).

– Като се използва извод 2 на Таблица 1, да се открие начинът за неговото намиране на съответния неизвестен компонент.

– Да се формулира съответното аритметично правило за намирането на неизвестно събираемо (множител).

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестно умляемо (Таблица 2)

Примерни задачи от система 1.

Задача 1.1. Проверете вярно ли са пресметнатите разликите.

$$55 - 14 = 41$$

$$143 - 22 = 121$$

$$37 - 12 = 25$$

$$41 + 14 = 55$$

$$121 + 22 = 143$$

$$25 + 12 = 37$$

Задача 1.1. може да се представи и чрез таблица. Тогава условието ѝ може да бъде: Като използвате действие събиране, проверете вярно ли е попълнената таблицата.

Умаляемо	55	143	37
Умалител	14	22	12
Разлика	41	121	25

Задача 1.2. Пресметнете разликата и направете проверка чрез събиране.

$$45 - 14 = ?$$

$$443 - 23 = ?$$

$$97 - 17 = ?$$

$$? + 14 = 45$$

$$? + 23 = 443$$

$$? + 17 = 97$$

Задача 1.2. също може да се разположи в таблица и условието ще бъде: Попълнете таблицата и направете проверка чрез събиране.

Умаляемо	45	443	97
Умалител	14	23	17
Разлика			

Извод 1 (от таблица 2): Ако към разликата на две числа прибавим умалителя, получаваме умаляемото.

Примерни задачи от система 2.

Задача 2.1. Като използвате дадените разлики и съответните сборове, проверете верни ли са равенствата:

$$5 - 2 = 3$$

$$9 - 5 = 4$$

$$18 - 6 = 12$$

$$3 + 2 = 5 \rightarrow 5 = 3 + 2$$

$$4 + 5 = 9 \rightarrow 9 = 4 + 5$$

$$12 + 6 = 18 \rightarrow 18 = 12 + 6$$

Задача 2.2. Пресметнете разликите, направете проверка чрез събиране и запишете умаляемото чрез разликата и умалителя.

$$5 - 2 = ?$$

$$39 - 34 = ?$$

$$19 - 15 = ?$$

$$? + 2 = 5$$

$$? + 34 = 39$$

$$? + 15 = 19$$

$$5 = ? + 2$$

$$39 = ? + 34$$

$$19 = ? + 15$$

Задача 2.3. Като използвате дадените разлики, изразете (запишете) умаляемото чрез разликата и умалителя.

$$11 - 6 = 5$$

$$124 - 120 = 4$$

$$305 - 105 = 200$$

$$11 = ? + ?$$

$$124 = ? + ?$$

$$200 = ? + ?$$

Извод 2 (от Таблица 2): Умаляемото е равно на сбора на разликата и умалителя.

Примерни задачи от система 3. (текстова задача, задача – математическа диктовка, или задача от вида $x - a = b$).

Задача 3.1. На паркинг в началото на деня имало няколко леки коли. След като през деня 34 коли напуснали паркинга, останали 28 коли. Колко коли е имало на паркинга в началото на деня?

Задача 3.2. Намислих число. От него извадих 23 и получих разлика 12. Кое число съм намислил?

Задача 3.3. Намерете неизвестното число (неизвестното умеляемо) $x(\square)$ в равенството $x - 34 = 66$ ($\square - 34 = 66$).

И тук, както при задачите от събиране, целта на задачите от вида 3.1, 3.2 и 3.3 е разбиране на понятието неизвестно умеляемо и извеждане начина за намирането му. След това правилото се формулира:

Извод 3 (от Таблица 2): Неизвестно умеляемо се намира, като към разликата прибавим умалителя.

Задачите и дейностите за въвеждане правилото за намиране на неизвестно делимо са аналогични на тези за неизвестно умеляемо.

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестно делимо (Таблица 2)

Примерни задачи от система 1.

Задача 1.1. Проверете вярно ли са пресметнати частните.

$$55 : 5 = 11$$

$$\boxed{11 \cdot 5 = 55}$$

$$144 : 3 = 48$$

$$\boxed{48 \cdot 3 = 144}$$

$$225 : 5 = 45$$

$$\boxed{45 \cdot 5 = 225}$$

Задача 1.1. може да се представи и чрез таблица. Тогава условието ѝ може да бъде: *Като използвате действие умножение, проверете вярно ли е попълнена таблицата.*

Делимо	55	144	225
Делител	5	3	5
Частно	11	48	45

Задача 1.2. Пресметнете частното и направете проверка чрез умножение.

$$45 : 5 = ?$$

$$\boxed{? \cdot 5 = 45}$$

$$441 : 3 = ?$$

$$\boxed{? \cdot 3 = 441}$$

$$212 : 2 = ?$$

$$\boxed{? \cdot 2 = 212}$$

Задача 1.2. също може да се разположи в таблица и условието ще бъде: *Попълнете таблицата и направете проверка чрез умножение.*

Делимо	45	441	212
Делител	5	3	2
Частно			

Извод 1 (от Таблица 2): Ако частното на две числа умножим с делителя, получаваме делимото.

Примерни задачи от система 2.

Задача 2.1. Като използвате дадените частни и съответните произведения, проверете верни ли са равенствата:

$$95 : 5 = 19$$

$$116 : 2 = 58$$

$$84 : 3 = 28$$

$$19 \cdot 5 = 95 \rightarrow 95 = 19 \cdot 5 \quad 58 \cdot 2 = 116 \rightarrow 116 = 58 \cdot 2 \quad 28 \cdot 3 = 84 \rightarrow 84 = 28 \cdot 3$$

Задача 2.2. Пресметнете частните, направете проверка чрез умножение и представете (запишете) делимото чрез частното и делителя.

$$85 : 5 = ?$$

$$394 : 2 = ?$$

$$156 : 3 = ?$$

$$? \cdot 5 = 85$$

$$? \cdot 2 = 394$$

$$? \cdot 3 = 156$$

$$85 = ? \cdot 5$$

$$394 = ? \cdot 2$$

$$156 = ? \cdot 3$$

Задача 2.3. Като използвате дадените частни, изразете (запишете) делимото чрез частното и делителя.

$$115 : 5 = 23$$

$$124 : 4 = 31$$

$$306 : 3 = 102$$

$$115 = ? \cdot ?$$

$$124 = ? \cdot ?$$

$$102 = ? \cdot ?$$

Извод 2 (от Таблица 2): Делимото е равно на произведението на частното и делителя.

Примерни задачи от система 3. (текстова задача, задача – математическа диктовка, или задача от вида $x - a = b$).

Задача 3.1. Всички плодове в един склад били разпределени в 5 магазина по равно. Всеки магазин получил 54 килограма плодове. Колко килограма плодове е имало в склада?

Задача 3.2. Намислих число. Разделих го на 6 и получих частно 12. Кое число съм намислил?

Задача 3.3. Намерете неизвестното число (неизвестното делимо) $x(\square)$ в равенството $x : 4 = 66$ ($\square : 4 = 66$).

И тук, както при задачите от събиране, целта на задачите от вида 3.1, 3.2 и 3.3 е разбиране на понятието неизвестно умаляемо и извеждане начина за намирането му. След това правилото се формулира:

Извод 3 (от Таблица 2): Неизвестно делимо се намира, като частното умножим с делителя.

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестен умалител (Таблица 3)

Тук могат да се решат задачи от система 1 и 2 от варианта задачи за въвеждане на неизвестно умаляемо. Като се използват извод 1 и извод 2, могат да се решат задачите:

Задача 3.1. (първи етап на извеждане на правилото) *Дадено е равенството $15 - x = 12$. Изразете (запишете) умаляемото чрез разликата и умалителя.*

Решение:

(1) $12 + x = 15$ (използва се извод 1 от таблица 2 или 3)

или

(2) $15 = 12 + x$ (използва се извод 2 от таблица 2 или 3)

Задача 3.2. (втори етап на извеждане на правилото) *В равенството, получено в решението на задача 3.1., намерете неизвестното събираемо.*

Решение:

(1) $12 + x = 15 \rightarrow x = 15 - 12$

или

(2) $15 = 12 + x \rightarrow x = 15 - 12$

(използва се извод 3 от Таблица 1 – правилото за намиране на неизвестно събираемо).

Извод 3 (от Таблица 3): Неизвестен умалител намираме, като от умаляемото извадим разликата.

Задача 3.3. *Като използвате задачи 3.1. и 3.2., намерете неизвестния умалител (използва се извод 3 – правилото за намиране на неизвестен умалител).*

$45 - x = 11.$

Решение:

$11 + x = 45$

$x = 45 - 11$

$x = 34.$

По аналогичен начин се достига до правилото за намиране на неизвестен делител.

Един вариант на система (последователност) от дейности и задачи за въвеждане правилото за намиране на неизвестен делител (Таблица 3)

Тук могат да се решат задачи от система 1 и 2 от варианта задачи за въвеждане на неизвестно делимо. Като се използват извод 1 и извод 2, могат да се решат задачите:

Задача 3.1. (първи етап на извеждане на правилото) *Дадено е равенството $155 : x = 5$. Изразете (запишете) делимото чрез частното и делителя.*

Решение:

(1) $5.x = 155$ (използва се извод 1 от Таблица 2 или 3)

или

(2) $155 = 5.x$ (използва се извод 2 от Таблица 2 или 3)

Задача 3.2. (втори етап на извеждане на правилото) *В равенството, получено в решението на задача 3.1, намерете неизвестното делимо.*

Решение:

(1) $5.x = 155 \rightarrow x = 155 : 5$

или

(2) $155 = 5.x \rightarrow x = 155 : 5$

(използва се извод 3 от Таблица 1 – правилото за намиране на неизвестно делимо).

Извод 3 (от Таблица 3): Неизвестен делител намираме, като делимото разделим с частното.

Задача 3.3. *Като използвате задачи 3.1. и 3.2., намерете неизвестния делител (използва се извод 3 – правилото за намиране на неизвестен делител).*

$147 : x = 3.$

Решение:

$3.x = 147$

$x = 147 : 3$

$x = 49.$

Система 1	Аналогични задачи за намиране на неизвестно събираемо и неизвестен множител		а . х = е, х = ?	
	2 + 3 = 5 или 2 + 3 = ? 5 - 3 = ? 5 - 2 = ?		2 . 3 = 6 или 2 . 3 = ? 6 : 3 = ? 6 : 2 = ?	
	Даден е сборът на две числа или той трябва да се пресметне и след това да се намерят съответните разлики.		Дадено е произведението на две числа или то трябва да се пресметне и след това да се намерят съответните частни.	
Система 2	Извод 1		Извод 1	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Ако от сбора на две числа извадим едното, получаваме другото.	Ако а + в = с, то с - в = а и с - а = в.	Ако произведението на две числа разделим на едното, получаваме другото.	Ако а . в = с, то с : в = а и с : а = в.
Система 2	Извод 2		Извод 2	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Всяко от двете събираеми може да се представи (запише) като разлика на сбора и другото събираемо.	Ако а + в = с, то а = с - в и в = с - а.	Всеки от двата множителя може да се представи (запише) като частно на произведението и другия множител.	Ако а . в = с, то а = с : в и в = с : а .
Система 3	Извод 3 (правило за намиране на неизвестно събираемо)		Извод 3 (правило за намиране на неизвестен множител)	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Неизвестното събираемо намиране, като от сбора извадим другото известно събираемо.	х + 3 = 5 или □ + 3 = 5 х = 5 - 3 или □ = 5 - 3	Неизвестния множителят намиране, като произведението разделим на другия известен множител.	х . 3 = 6 или □ . 3 = 6 х = 6 : 3 или □ = 6 : 3

Таблица 2. Системи задачи за въвеждане на правилата за намиране на неизвестно умаляемо и неизвестно делимо

Системи задачи	Аналогични задачи за намиране на неизвестно умаляемо и неизвестно делимо			
	$x - a = e, x = ?$	$x : a = e, x = ?$	$5 - 2 = 3$ или $5 - 2 = ?$ $3 + 2 = ?$	$6 : 2 = 3$ или $6 : 2 = ?$ $3 \cdot 2 = ?$
Система 1	Дадена е разликата на две числа или тя трябва да се пресметне и след това да се направи проверка чрез намиране на съответния сбор.		Дадено е частното на две числа или то трябва да се пресметне и след това да се направи проверка чрез намиране на съответното произведение.	
	Извод 1		Извод 1	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
Система 2	Ако към разликата на две числа прибавим умалителя, получаваме умаляемост.	Ако $a - e = c$, то $c + e = a$.	Ако частното на две числа умножим с делителя, получаваме делимост.	Ако $a : e = c$, то $c \cdot e = a$.
	$5 - 2 = 3$ $3 + 2 = 5 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2$		$6 : 2 = 3$ $3 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow 6 = 3 \cdot 2$	
	Използва се симетричността на релацията „равно“, т.е. разменят се лявата и дясната страна на числовите равенства.			
Система 3	Извод 2		Извод 2	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Умаляемост е равно на сбора на разликата и умалителя. $x - 2 = 3, x = ?$ или $\square - 2 = 3$ Да се намери неизвестното умаляемо.	Ако $a - e = c$, то $a = c + e$.	Делимост е равно на произведението на частното и делителя. $x : 2 = 3, x = ?$ или $: 2 = 3$ Да се намери неизвестното делимо.	Ако $a : e = c$, то $a = c \cdot e$.
Система 3	Прилага се извод 2 за неизвестното умаляемо.		Прилага се извод 2 за неизвестното делимо.	
	Извод 3 (правило за намиране на неизвестно умаляемо)		Извод 3 (правило за намиране на неизвестно делимо)	
	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
Система 3	Неизвестното умаляемо намирам, като към разликата прибавим умалителя.	$x - 2 = 3$ или $\square - 2 = 3$ $x = 3 + 2$ или $\square = 3 + 2$	Неизвестното делимо намирам, като частното умножим с делителя.	$x : 2 = 3$ или $\square : 2 = 3$ $x = 3 \cdot 2$ или $\square = 3 \cdot 2$

Таблица 3. Системи задачи за въвеждане на правилата за намиране на неизвестен умалител и неизвестен делител

Системи задачи	Аналогични задачи за намиране на неизвестен умалител и неизвестен делител			
	Извод 1		Извод 2	
Система 1	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Ако към разликата на две числа прибавим умалителя, получаваме умаляемостта. Умаляемостта е равно на сбора на разликата и умалителя.	Ако $a - b = c$, то $c + b = a$ Ако $a - b = c$, то $a = c + b$.	Ако частното на две числа умножим с делителя, получаваме делимостта. Делимостта е равно на произведението на частното и делителя.	Ако $a : b = c$, то $c \cdot b = a$ Ако $a : b = c$, то $a = c \cdot b$.
	$5 - 2 = 3$ или $5 - 2 = ?$ $3 + 2 = ?$		$6 : 2 = 3$ или $6 : 2 = ?$ $3 \cdot 2 = ?$	
Система 2	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Дадена е разликата на две числа или тя трябва да се пресметне и след това да се направи проверка чрез намиране на съответния сбор.	Дадено частното на две числа или то трябва да се пресметне и след това да се направи проверка чрез намиране на съответното произведение.	Прилага се извод 1 или извод 2 от Таблица 2.	Прилага се извод 1 или извод 2 от Таблица 2.
	$5 - 2 = 3$ или $5 - 2 = ?$ $3 + 2 = ?$		$6 : 2 = 3$ или $6 : 2 = ?$ $3 \cdot 2 = ?$	
Система 3	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Всяко от двете събираеми може да се представи (запише) като разлика на сбора и другото събираемо.	Всяко от двете събираеми може да се представи (запише) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете множители могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Ако $a : b = c$, то $a = c \cdot b$ и $b = a : c$.
	$5 - x = 3$, $x = ?$ или $5 - \square = 3$ Да се намери неизвестният умалител.	$6 : x = 3$, $x = ?$ или $6 : \square = 3$ Да се намери неизвестният делител.	Прилага се извод 1.	Прилага се извод 1.
Система 4	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.
	$5 - x = 3$, $x = ?$ или $5 - \square = 3$ Да се намери неизвестният умалител.	$6 : x = 3$, $x = ?$ или $6 : \square = 3$ Да се намери неизвестният делител.	Прилага се извод 1.	Прилага се извод 1.
Система 5	Словесна формулировка	Символичен запис	Словесна формулировка	Символичен запис
	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.	Всички от двете събираеми могат да се представят (запишат) като частно на произведението и другия множител.
	$5 - x = 3$, $x = ?$ или $5 - \square = 3$ Да се намери неизвестният умалител.	$6 : x = 3$, $x = ?$ или $6 : \square = 3$ Да се намери неизвестният делител.	Прилага се извод 1.	Прилага се извод 1.

Общи изводи

Задачите за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция са важна група задачи в началния училищен курс по математика. Тяхното разбиране и усвояване е по-лесно и бързо, ако до тях се достига чрез аналогията събиране–умножение и изваждане–деление.

Връзката между обратните аритметични операции е в основата на много групи аритметични и алгебрични задачи. Използването ѝ води до изграждане на умения за рационални пресмятания и на осъзнато въвеждане и прилагане на аритметични правила и следователно до изграждане на общени математически знания и до развитие на логическото мислене на учениците.

Аналогията събиране–умножение и изваждане–деление и нейното прилагане е гаранция за икономия на умствени усилия и за умения за решаване на непознати, но аналогични на познати групи задачи с познати средства.

Аналогията събиране–умножение и изваждане–деление и следващата от нея аналогия на термините и семантиката на съответните изводи и правила дава възможност за самостоятелно откриване на нови математически факти. Например основното математическо съдържание на изводите за връзката между умножение и деление и на съответните правила за намиране на неизвестен множител, делимо и делител може да се формулира, като формално термините от връзката и правилата при събиране и изваждане се заменят съответно с термините от умножение и деление:

събираме → умножаваме

събираемо → множител

сбор → произведение

изваждаме → делим

умяляемо → делимо

умалител → делител

разлика → частно

и т.н.

Овлабяването на алгебричното съдържание в началното обучение по математика и на аналогията като метод на мислене осигурява успешен преход от начална към средна и горна степен на обучение.

Заклучение

Разглеждането на аналогията на връзките между събиране и изваждане и умножение–деление и прилагането ѝ за пропедевтично изучаване на понятието уравнение са основани на математическата и дидактическата ѝ същност. Ето защо представените в разработката идеи биха довели до обогатяване на теорията и практиката на началното обучение по математика.

ЛИТЕРАТУРА

- Минчева, И. (2006). *Връзката между аритметичните операции събиране и изваждане в началното обучение по математика* (с. 261–267).
- В: Атанасова, М. & Дяков, С. (ред.) *Подготовката на учители и социални педагози в навечерието на европейската интеграция*. София: Веда Словена – ЖГ.
- Минчева, И. (2003). *Задачите за намиране на неизвестен компонент на аритметична операция и приложението им за решаване на текстови задачи в обучението по математика в началните класове*. Велико Търново: Астарта.
- Минчева, И. (2010). *Методика на обучението по математика в началните класове – специална част, избрани глави от общата част*. Пловдив: Астарта.

THE INTERRELATIONS BETWEEN ADDITION–SUBTRACTION AND MULTIPLICATION–DIVISION AND THE PRELIMINARY TEACHING OF THE CONCEPT OF AN EQUATION IN PRIMARY SCHOOL COURSE OF MATHEMATICS

Abstract. In the article some ideas about the interrelations between arithmetic operations are presented. The aim is to systemize problems and to use them for introducing the rules of finding an unknown component of an arithmetic operation. All the systems and their implementation are illustrated by problems taken out of the primary school course of mathematics.

Ivanka Mincheva, PhD

Department of Algebra and Geometry
Veliko Tarnovo University
5000 Veliko Tarnovo
Bulgaria
e-mail: i.mincheva@uni-vt.bg