

ВЪРХУ ПРЕПОДАВАНЕТО НА МАТЕМАТИКА НА УЧЕНИЦИ СЪС ЗРИТЕЛНИ УВРЕЖДАНИЯ

Сава Гроздев, Елиза Петрова

Резюме. Статията е посветена на няколко упражнения по математика, предназначени за ученици със зрителни увреждания. Предложена е схема за преподаване на урока „Питагорова теорема“. Съответната методика се основава на правоъгълния метод.

Keywords: students with visual impairments, mathematics, Pythagorean theorem, rectangular method

Увод. В България голямата част от зрително затруднените деца се обучават в специални училища. Интегрираното и включващо обучение дава възможност на учениците с нарушено зрение да учат в масовото училище. Независимо къде се обучава – в специално или масово училище, зрително затрудненото дете не бива да бъде изолирано. Необходимо е да му се осигурят подходящи условия за развитие и усвояване на всички изучавани дисциплини. Сегашната образователна практика по математика все още не е напълно готова да посрещне нуждите на интегрираното обучение. За съжаление учителите по математика в масовите училища не са подготвени за работа със слепи ученици. Вторият автор на настоящата статия е учител в специално училище. Тя е сляпа и споделянето на дългогодишния ѝ опит ще е полезно за всеки учител по математика, на когото се налага да работи със зрително затруднени ученици.

Деца със зрителни увреждания са като всички останали – те искат да са можещи, да решават задачи заедно с останалите, да са част от колектив, да се чувстват пълноценни, да имат възможност да демонстрират своята индивидуалност, да не бъдат толерирани безпричинно, но да бъдат оценявани заслужено и без съжаление. Спецификата на възприятието на всяко дете зависи от зрителното увреждане – дали е родено сляпо, придобита ли е слепотата или детето е с остатъчно зрение. Във всеки от трите случая начинът на преподаване е различен. На първата група (сляпо родените) е необходимо да се развиват първичните представи за заобикалящите ни обекти. Това включва много и разнообразни обяснения, илюстриране с релефни изображения, привеждане на познати от реалността предмети и тяхното разположение в теоретични формулировки. Към втората група (по-

късно ослепелите) обикновено се подхожда със стремеж да се запази и обогати визуалната представа за обектите с помощта на релефни модели. При третата група (слабо виждащите) е необходимо да се използва максимално зрението и да се помага с чертежи и графики предимно с контрастни цветове. Често децата със зрителни увреждания имат грешна представа за заобикалящите ги предмети. Тази представа трябва да се коригира в момента, в който се установи. Несъответствието между обективната представа и представата, която няма нищо общо с реалността, води до задълбочаване на грешните представи. То може да попречи на детето да се реализира и интегрира в света на хората без зрителни проблеми. Зрително затруднените трябва да са знаещи и можещи, за да бъдат приемани като равностойни. Конкретно по отношение на математическите знания съществуват възможности затрудненията при формирането им поради зрителен дефект да бъдат сведени до минимум. Основно правило е, че на децата със зрителни увреждания не бива да се внушава, че математиката не им е нужна. Напротив, такива деца трябва да бъдат убеждавани, че усилията, които полагат, ще бъдат оправдани.

Натрупвания в геометричните представи. Проблемите в сферата на представите, ограниченият сензорен опит и трудностите в ориентирането не са интелектуални, а технически. Това предполага някои от дидактическите принципи и методи за компенсация на затрудненията да бъдат адаптирани във връзка със слепотата и ограниченото зрение. При обучението по геометрия още в началния етап трябва да се тръгне по посока от интуитивното познание към формалното разбиране. Мисленето и представата, в частност геометричната представа е привлекателна област за изследване, особено когато се отнася за деца с нарушено зрение. От класическите твърдения за създаване на геометрични обекти е добре известно, че тези обекти възникват бавно от действителността. Проблемът се поставя с подчертана острота пред учителите, които работят с деца с нарушено зрение.

Добре е известно, че натрупването на геометрични представи се реализира, като всеки предмет се оприличава с дадена фигура. Самото натрупване трябва да започва от най-ранно детство. То може да се осъществява първоначално като задача-игра. Например на сляпото дете се дават кубче и хартиени квадратчета с размери, равни на ръба на кубчето. Детето се оставя известно време да свикне с тях, след което му се поставя задачата да постави хартиените квадрати върху стените на кубчето. По този начин то осъзнава, че стената на куба има формата на квадрат. Подобно натрупване трябва да продължи с всички останали основни фигури. В случая с окръжност и кръг е подходящо на детето да се дадат пластмасови чинии, дискове, чаши и хартиени кръгове. За дъното на чашата например му се поставя задача-игра да открие онзи хартиен кръг, който се налага точно върху дъното.

Аналогична може да бъде задачата-игра с чиниите и дисковете. Основният метод в този процес е сравнението, чрез което се осъзнава аналогията. Повторенията са задължителни за реализиране на натрупването.

Следващ етап е изучаване на контурите на геометричните фигури, които са частен случай на графиките. Интересен е въпросът как зрителното четене на графики може да се замести с тактилно разчитане на релефни картинки. Развиването на умение за последното е от изключителна важност при слепите деца. Подобно умение ще им е необходимо при изучаването на мобилни карти, които описват конкретни маршрути от ежедневието. Умението е необходимо във всички науки, които изучават – математика, биология, физика, география и тактилно творчество. За да успее човек да изобрази някой детайл от определен предмет, той първо трябва да може да си представи този предмет. Самата представа се изгражда с натрупване на понятия и техни релефни изображения. Успешната работа при четене и построяване на релефни графични изображения се обуславя от съзнателното възприемане на предметите и явленията, както и от вярното им отнасяне към релефни изображения най-напред в двумерното, а по-късно и в тримерното пространство. Реализацията е възможна посредством наблюдения на реални обекти, словесни описания и релефни графики и картинки. Обучението за придобиване на трайни навици при построяване на графики, тела и техните линейни елементи води естествено до осъзнато отделяне на детайлите от цялото. Основната задача се свежда до разпознаване и четене на графики и чертежи. Уменията и знанията, които ще придобият децата със зрителни увреждания по този начин, ще ги карат несъзнателно да правят приложения в живота и във всички изучавани науки. Чрез релефните чертежи и графики се развиват абстрактното мислене, пространствените представи и въображението. Слепите деца, с които е работено по този начин, имат реална представа за заобикалящия ги свят.

По отношение на контурите на геометрични фигури могат да се използват контури върху лист хартия. Добре е учениците сами да изработват съответните контури. Примерно осъществяване на подобна процедура е следното. Взема се парче балатум и се обръща с грапавата част нагоре. Детето поставя лист хартия върху обърнатия балатум, а над него – избраният модел. С химикал се очертава контурът на фигурата. Когато листът се обърне, на обратната му страна се появява релефен огледален образ на изчертания контур. Технически това се постига чрез грапавината на обърнатото парче балатум. Детето има възможност да опипа образа и да получи представа за дадената фигура. Съществуват различни начини за получаване на същия ефект, но описаният е един от най-удачните. От една страна, той не изисква особено много средства и приготовления, а от друга – слепите деца, въпреки различния начин, по който ще направят контура в сравнение със

зрящите, се чувстват приобщени към тях, защото ползват химикалката по същия начин, както и зрящите. Разбира се, съществуват и специални прибори за чертане, но работата с тях би трябвало да започне на по-късен етап, тъй като чертането по този начин изисква по-фина моторика.

Интерес представлява разбирането на пространството и зависимостта между фигурите в него като организация на една динамична система. Връзката между две фигури може да се разглежда като интуитивно разбиране на геометрична трансформация и най-често като изометрия. Когато разглеждаме спонтанни картинки, направени от сляпо дете, откриваме наслагвания на геометрични обекти. Децата със зрителни увреждания обичат да рисуват по описания начин с парчето балатум. Също като децата без зрителни проблеми те орнаментират своите картинки. В тях откриваме интуитивна представа за съответни геометрични трансформации. Интересен би бил отговорът на въпроса дали интуитивната представа за геометрична трансформация е по-близо до специфичното разположение на фигурите една спрямо друга, или по-скоро до тяхното физическо преместване. Понятията и процесите на тяхното разбиране в геометрията са трудни не само за слепите деца. Когато се появи ново математическо понятие, в началото то буди съмнение. Затова е необходимо въвеждането на новото да става по естествен начин – чрез множество ситуации, активности и решаване на задачи. Самите геометричните понятия са скрити. Те трябва да се откриват в различни модели от живота. Геометричният свят възниква от реалния посредством изградена геометрична интуиция. Посредством нея основно се разбира и материалният свят. „Първото и основно разбиране на материалния свят е чрез сетивата. Ние гледаме геометричния свят не чрез нашите очи, изучаваме геометричния свят, но не с обичайните сетива. Геометричното виждане е възможно само благодарение на шестото чувство. Това виждане не е по-малко очевидно от виждането на материалния свят чрез зрението. Който няма геометрично виждане, не може да вникне в геометричния свят. Той или тя могат само да ни слушат как говорим за този свят“ (Vopenka, 1989).

При диференцирано обучение на деца със зрителни проблеми има шанс да се достигне ефектът на обучението на деца без такива проблеми. Геометричната интуиция, която трябва да им се помогне да развият, е предпоставка за висока математическа компетенция. Това изисква адаптиране на принципа за нагледност. Онагледяването трябва да бъде предшествано и съпътствано от ясни и конкретни инструкции на учителя върху това, какво ще бъде показвано, как да бъде възприето и разбрано и на какво да се обърне специално внимание. Без подобни указания зрително затруднените ученици не са в състояние да се ориентират към същественото и ще изгубят много време в безцелно опипване или наблюдение, познато в психологията на зрително затруднените като „тактилен шум“ (Радулов, 2004).

При изучаване на геометрия в средния курс особено подходящ е т. нар. „правоъгълен метод“, който се прилага с успех в някои от израелските училища. Без да се пренебрегва строгостта и запазвайки дедуктивната структура на класическата Евклидова геометрия, можем да започнем изучаването ѝ с едни от най-познатите геометрични фигури – правоъгълниците. След тях идват правоъгълните триъгълници, равнобедрените триъгълници и чак най-накрая са останалите триъгълници, четириъгълниците и т.н. Подходът чрез правоъгълния метод дава възможност да се въведат понятията лице и подобие на правоъгълни триъгълници, да се говори за Питагоровата теорема и наклон на права, като не се пропускат доказателствата на важни теореми. Правоъгълният подход е подходящ не само за силните ученици, които могат да оценяват изяществото на дедуктивната структура, но и за по-слабите, които възприемат геометрията като съвкупност от полезни факти, приложими към практически задачи. В началото е желателно да се избягват доказателства на тривиални резултати. Подобни доказателства водят до бъдещи затруднения у учениците при срещата им със съдържателни факти. Подобна опасност се елиминира с помощта на правоъгълния метод. При него бързо се стига до първите два признака за еднаквост на триъгълници и до ранно въвеждане на пресмятания с лица и суми на ъгли. Предложената по-долу схема на урока „Питагорова теорема“ се основава именно на правоъгълния метод.

Урок „Питагорова теорема“.

Цел на урока

- да се докаже и изучи теоремата на Питагор;
- да се развият логическото мислене, математическата реч и навиците за работа с допълнителна и справочна литература;
- да се развият концентрацията, навиците за самоконтрол и проявите на творчество;
- да се даде възможност на учениците да открият новото за себе си и да проявят интерес към историята на математиката и математическите открития.

Структура на урока

На групата от *сляпо родените деца* се раздават готови материали: тифлографски прибори, планшет, райсфедер за релефно-графично чертане, брайлов лист, пихтова машина. По време на урока непрекъснато се показват всички детайли, за които се говори.

На *късно ослепелите деца* се раздават същите готови материали. Разликата е, че тези ученици се ориентират самостоятелно и само при необходимост търсят помощ от учителя.

На *децата с остатъчно зрение* се раздават материали с контрастни цветове.

До този момент учениците знаят какво е проекция на отсечка върху права. В края на предишния урок те са разделени на групи и на всяка е зададена за проучване по една от следните теми:

I група: Питагор Самоски (570 – 495 г. пр. н. е.) – един от най-известните хора на Древна Гърция.

II група: Питагорейската школа и Питагорейският съюз.

III група: Философската мистика на числата.

1. Всяко число е символ. Числото е свещено.

2. Философия и астрономия.

IV група: Различни доказателства на теоремата на Питагор.

Урокът започва с изложение на всяка от групите. Учителят прави обобщение и пита: „Направи ли ви впечатление дума или комбинация от думи, които непрекъснато се повтаряха?“. Отговори: правоъгълен триъгълник, Питагорова теорема. Учителят съобщава, че днешният урок е посветен на Питагоровата теорема.

Изложение на урока

Учителят задава следните въпроси:

1. Кои са основните обекти на равнинната геометрия?

Отговор: точките и правите

2. Колко прави минават през две различни точки?

Отговор: една

Учителят раздава по един правоъгълен лист хартия (например А4) на всеки ученик. Учениците изучават листа, като го опипват по страните и върховете, плъзгат го по чина, обръщат го наопаки и т.н. Учителят дава указания за всички действия и ги описва подробно. Той насочва вниманието на учениците към различните размери на правоъгълника, към по-дългата страна (дължината на правоъгълника) и по-късата (широчината на правоъгълника). Обръща внимание, че четирите страни са две по две равни, което ще бъде доказано по-късно. След това приканва учениците да си изберат една от двете дължини на правоъгълника и съобщава, че предстои изучаване на тази дължина. Следва въпрос:

3. Какъв геометричен обект е избраната дължина на правоъгълника?

Отговор: отсечка

Учителят поставя задача листът да бъде сгънат на две по избраната дължина (отсечка). Той обяснява, че след прегъването се получават два нови правоъгълника с обща страна. Един от размерите на новите правоъгълници се запазва. Учени-

ците опипват сгънатия правоъгълник, разгъват го и пак го сгъват. Действията се повтарят няколко пъти. Следва въпрос:

4. Какво се е случило с отсечката след прегъването?

Отговор: (дължината на) отсечката е разделена на две

Учителят подканя учениците да докоснат точката на прегъване за отсечката. Целта е да се осъзнае, че тази точка е средата на отсечката (дължината на първоначалния правоъгълник). С последователни разгъвания и сгъвания учениците опипват двете части на отсечката и се убеждават, че те са равни. Заклучението е, че отсечката има среда, която я разделя на две равни части. Учителят насочва вниманието на учениците към общата страна на двата новополучени правоъгълника. Съобщава, че предстои изучаване на тази страна (отсечка). Учениците се приканват да разгънат правоъгълника и да опипат отсечката на прегъване. Тази отсечка е перпендикулярна на избраната дължина на първоначалния правоъгълник. Тя минава през средата на избраната дължина. Самата отсечка на прегъване е част от права линия, която е перпендикулярна на избраната дължина на първоначалния правоъгълник и минава през средата ѝ. Следва въпрос:

5. Как се нарича правата, която е перпендикулярна на отсечка и я разполювява?

Отговор: симетрала

Във второ упражнение вместо правоъгълник учениците получават по един хартиен правоъгълен равнобедрен триъгълник. Провеждат се аналогични на горните действия. Прегъването се осъществява така, че да съвпадна върховете на остриите ъгли на триъгълника. Новополучените два триъгълника са също правоъгълни и равнобедрени. Отсечката на прегъване лежи на симетралата на хипотенузата. Тази симетрала е и ъглополовяща на правия ъгъл на първоначалния правоъгълен триъгълник. Прави се извод, че всеки ъгъл може да се разполови по подобен начин. Учителят изисква от учениците да си припомнят определението и признаците за еднаквост на триъгълници. Следва въпрос: Кой ъгъл е прав? Отговори: Който е равен на 90° . Който е равен на своя съседен. При всички действия учениците се приканват да опипват триъгълника, да го сгъват и разгъват многократно. На подробностите няма да се спираме. Те са аналогични на тези при правоъгълника от предното упражнение.

Следва връщане към правоъгълника, който се определя като четириъгълник с четири прави ъгла. От аксиомата за успоредните прави се получава непосредствено следствието: четириъгълник с три прави ъгла е правоъгълник. По-нататък се работи с означения. Нека първоначалният правоъгълник е $ABCD$, а избраната

от двете му дължини е отсечката AB . С помощта на съгъването по симетралата на страната AB илюстрираме равенството на двете страни, които са съседни на AB . За да докажем равенство на противоположните страни BC и AD на правоъгълника $ABCD$, означаваме с M средата на AB . Нека N е пресечната точка на симетралата на AB с CD . Тогава $\triangle AMN$ е еднакъв с $\triangle BMN$ по първи признак, доколкото $AM = BM$, страната MN е обща и $\angle AMN = \angle BMN = 90^\circ$. В резултат получаваме, че $AN = BN$ (формулираме свойството на симетралата: всяка точка от симетралата на отсечката AB е равноотдалечена от краищата A и B на AB) и

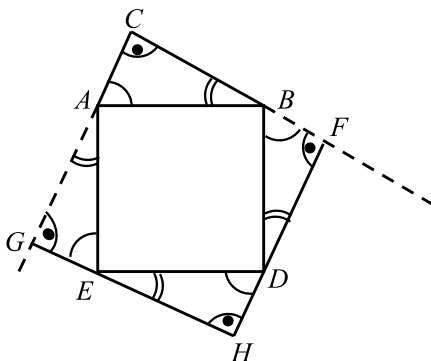
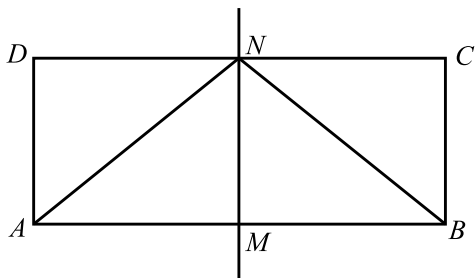
$$\angle DAN = 90^\circ - \angle MAN = 90^\circ - \angle MBN = \angle CBN.$$

От споменатото по-горе следствие (четириъгълник с три прави ъгъла е правоъгълник, т.е. и четвъртият ъгъл на правоъгълника е прав) следва, че $\angle MNC = 90^\circ$ и $\angle MND = 90^\circ$. Тогава $\angle DNA = 90^\circ - \angle ANM = 90^\circ - \angle BNM = \angle CNB$. Следователно триъгълниците DNA и CNB са еднакви по втори признак. Оттук $AD = BC$.

И така, правоъгълникът има „дължина“ и „широчина“. Ако „дължината“ и „широчината“ са равни, то правоъгълникът е квадрат.

Да фиксираме две перпендикулярни прави, които ще наричаме оси, и да разгледаме всяка ос като числова права със съответна единична отсечка. Нанасяме единичната отсечка по осите и отбелязваме точките на деление. През така получените точки прекарваме прави, перпендикулярни на съответните оси. Получаваме мрежа от еднакви правоъгълници. Всеки правоъгълник със страни m см и n см се разбива на $m \cdot n$ квадрата със страна 1 см. Казваме, че лицето на този правоъгълник е равно на $m \cdot n$ квадратни сантиметра (т.е. $m \cdot n$ см²). По-общо, определяме лицето на правоъгълник като произведение на дължините на страните му, измерени с подходяща единична отсечка. Това определение е свързано с изучаване на умножението на рационални числа в алгебрата, което се илюстрира с деление на единични квадрати (на подробностите няма да се спираме).

По-нататък обръщаме внимание, че всеки правоъгълен триъгълник може да се допълни до правоъгълник, един от диагоналите на който е хипотенузата на триъгълника. Допълващият триъгълник е еднакъв на първоначалния по първи признак. Оттук получаваме, че сумата от ъглите в правоъгълния триъгълник е 180° и лицето на правоъгълния триъгълник е половината от произведението на катетите му.



Премаваме към доказателство на Питагоровата теорема. Нека ABC е правоъгълен триъгълник с хипотенуза $AB = c$ и катети $AC = b$ и $BC = a$. Построяваме квадрат $ABDE$ в полуравнината относно AB , която не съдържа върха C . Нека F е петата на перпендикуляра от D към правата CB , G е перпендикуляр от E към правата CA . Ако H е пресечната точка на правите GE и FD , то $\angle EHD = 90^\circ$ (защото другите три ъгъла в четириъгълника $GHFC$ са прави). Като използваме, че сумата от ъглите в правоъгълния триъгълник е 180° , заключаваме, че триъгълниците ABC , BDE , EAG и DEH са еднакви. От една страна, квадратът $CGHF$ има страна $a + b$ и лице $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, а от друга – лицето на този квадрат е сума на лицето c^2 на квадрата $ABDE$ и лицата $\frac{1}{2}ab$ на еднаквите триъгълници ABC , BDE , EAG и DEH . От равенството $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$ получаваме Питагоровата теорема $a^2 + b^2 = c^2$.

Равенството на диагоналите AC и BD на правоъгълника $ABCD$ от първия чертеж се доказва с помощта на първи признак за еднаквост на правоъгълните триъгълници BAD и ABC . От друга страна, този факт е непосредствено следствие от Питагоровата теорема. От Питагоровата теорема извеждаме и факта, че най-късото разстояние от точка A до права l е AM , където M е пресечната точка на перпендикуляра от A към l . Също така, ако $AP < AQ$ за точки P и Q от l , то за ортогоналните проекции MP и MQ , съответно на AP и AQ , е в сила същата зависимост, т.е. $MP < MQ$. Това не са единствените приложения на Питагоровата теорема. Съществуват много други, които могат да бъдат подбрани по желание на учителя.

Пряко затвърдяване на Питагоровата теорема

Задача. В правоъгълен триъгълник по дадени два линейни елемента a (катет), b (катет), c (хипотенуза), a_1 (проекцията на катета a върху хипотенузата), b_1

(проекцията на катета b върху хипотенузата), h_c (височината към хипотенузата) намерете останалите четири.

а) Ако $a = 3$ и $c = 5$, намерете дължините на останалите четири елемента.

б) Ако $a_1 = 4$ и $h_c = 5$, намерете дължините на останалите четири елемента.

Домашна работа

Задача. В правоъгълен триъгълник по дадени два линейни елемента a (катет), b (катет), c (хипотенуза), a_1 (проекцията на катета a върху хипотенузата), b_1 (проекцията на катета b върху хипотенузата), h_c (височината към хипотенузата) намерете останалите четири. Извършете пресмятанията за $a = 5$ и $h_c = 3$.

Заклучение. В проведения урок са използвани следните методи на научно познание: индукция, анализ, аналогия, обобщение. Дидактическите технологии включват интерактивни техники, като класът се разделя на групи според спецификата на зрителното увреждане и се използва диференцирано обучение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Радулов, В. (2004). *Педагогика на зрително затруднените*. София: СУ „Св. Климент Охридски“.
2. Vopenka, P. (1989). *Rozpravy s geometrii*. Praha: Panorama.

Сава Гроздев

✉ професор, доктор по математика, доктор на педагогическите науки
Институт по математика и информатика – БАН
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
1113 София, България
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Елиза Петрова

✉ учител
СОУДНЗ „Луи Брайл“
Ломско шосе, 177
София
E-mail: elpapazian@abv.bg

ON MATHEMATICS TEACHING TO STUDENTS WITH VISUAL IMPAIRMENTS

Abstract. The paper considers several exercises in Mathematics for students with visual impairments. A scheme is proposed to teach the lesson „The Pythagorean theorem“. The corresponding methodology is based on the rectangular method.

Sava Grozdev

✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Eliza Petrova

✉ teacher
„Louis Braille“ Secondary School
Lomsko shosse, 177
Sofia
E-mail: elpapazian@abv.bg