

ВЕТРИЛА ОТ ОКРЪЖНОСТИ ВЪВ ВПИСАНИ МНОГОЪГЪЛНИЦИ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

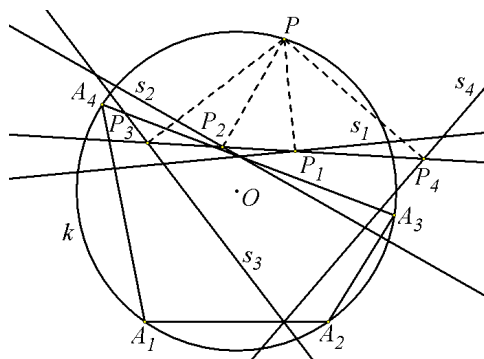
¹Висше училище по застраховане и финанси – София

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата работа е приложена индуктивната конструкция на Симсънова права за произволен вписан многоъгълник. В резултат на това са получени забележителни за вписания многоъгълник окръжности, които притежават интересни свойства. Разглежданите конструкции са извършени с помощта на програмата The Geometer's Sketchpad (GSP), а някои от аналитичните пресмятания – с Maple.

Keywords: inscribed polygon, The Geometer's Sketchpad, Maple

1. Симсънова права спрямо вписан многоъгълник. Добре известна теорема от геометрията на триъгълника може да се изрази по следния начин: ако $\Delta A_1 A_2 A_3$ е произволен триъгълник и P е точка в равнината му, то петите P_1 , P_2 и P_3 на перпендикулярите, спуснати от P съответно към $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$, лежат на една права тогава и само тогава, когато P е точка от описаната за $\Delta A_1 A_2 A_3$ окръжност k . По този начин на всяка точка P от описаната окръжност k се съпоставя права, която се нарича Симсънова права на P спрямо $\Delta A_1 A_2 A_3$. За всички останали точки P , т.е. тези, които не принадлежат на k , точките P_1 , P_2 и P_3 лежат на една окръжност.

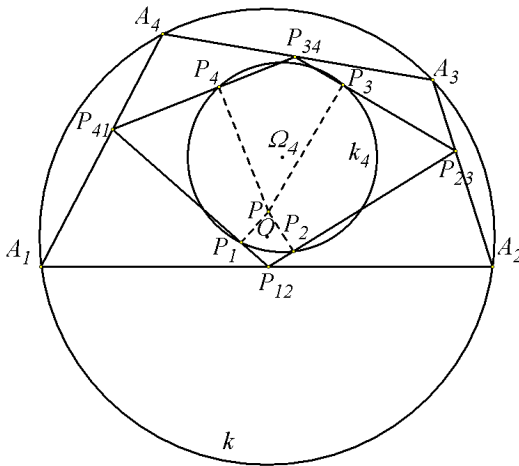


Фигура 1

Естествено възниква въпросът за аналогично получаване на прави, определени от точките на описаната около четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ окръжност k . Оказва се, че петите на перпендикулярите, спуснати от произволна точка P на k върху правите A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 и A_4A_1 , не лежат на една права. Въпреки това съществува друг начин за получаване на прави, съответстващи на точките от описаната окръжност k . Този начин се основава на използването на добре известните ни Симсънови прави спрямо триъгълник. Нека четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k и P е точка от k . С s_1, s_2, s_3 и s_4 означаваме Симсъновите прави на P съответно спрямо $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$. В сила е следното твърдение: ако P_1, P_2, P_3 и P_4 са ортогоналните проекции на P съответно върху правите s_1, s_2, s_3 и s_4 , то точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на една права (фиг. 1). Тази права се нарича права на Симсън за P спрямо четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$.

Сега е ясно, че същият подход може да се приложи към точка P от вписан в окръжност k петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$. В този случай имаме: петите на перпендикулярите, спуснати от P , върху Симсъновите ѝ прави спрямо четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$, лежат на една права. Тази права се нарича права на Симсън за P спрямо петоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Така можем да продължим до определяне на Симсънова права за точка P от описаната около $n-1$ -ъгълник $A_1A_2 \dots A_{n-1}$ окръжност k . По-нататък, ако P е точка от описаната около n -ъгълник $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ окръжност k , ортогоналните ѝ проекции върху нейните Симсънови прави спрямо $n-1$ -ъгълниците $A_2A_3 \dots A_3A_{n-1}A_n$, $A_3A_4 \dots A_nA$, ..., $A_nA_1 \dots A_{n-3}A_{n-2}$ и $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ лежат на една права, която се нарича Симсънова права за P спрямо $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$. По този индуктивен начин получаваме понятието Симсънова права за точка P от описаната около n -ъгълник $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ окръжност k .

2. Симсънова окръжност спрямо вписан четириъгълник. Ако точка P не лежи върху описаната окръжност на $\Delta A_1A_2A_3$, то точките P_1, P_2 и P_3 лежат на една окръжност по естествени причини (през три точки, нележащи на една права, минава една окръжност). Конструкцията на Симсънова права за точка P от описаната около четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ окръжност k ни дава идея за търсене на конфигурация в равнината на $A_1A_2A_3A_4$, когато P не лежи върху окръжността k . Нека P е точка в равнината на вписания в окръжност k четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$. С P_{12}, P_{23}, P_{34} и P_{41} означаваме ортогоналните проекции на P съответно върху правите A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_1 . Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 са ортогоналните проекции на P съответно върху правите $P_{12}P_{41}, P_{12}P_{23}, P_{23}P_{34}$ и $P_{34}P_{41}$ (фиг. 2). Ако P лежи върху k , правите $P_{12}P_{41}, P_{12}P_{23}, P_{23}P_{34}$ и $P_{34}P_{41}$ са Симсъновите прави на P съответно спрямо триъгълниците $A_4A_1A_2, A_2A_3A_1, A_2A_3A_4$ и $A_3A_4A_1$ (фиг. 2). Затова можем да очакваме, че ако P не лежи върху k , точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на една окръжност



Фигура 2

ност k четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ ще наричаме *Симсънова окръжност на P спрямо $A_1A_2A_3A_4$* (фиг. 2).

3. Симсънова окръжност спрямо вписан петъгълник. Подобно на получената окръжност k_4 можем да очакваме, че съществува окръжност, породена от точка P в равнината на петъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$, вписан в окръжност k .

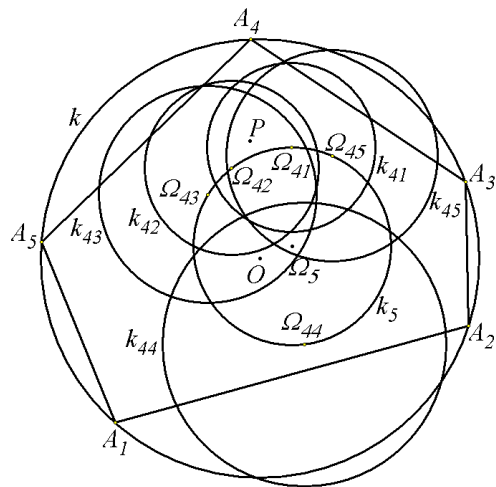
Експериментите с GSP не потвърждават тези очаквания. Идея за нова конструкция ни дава методът на построяване на Симсънова права, преминавайки от четириъгълник към петъгълник. Но да приложим тази идея върху вече получените окръжности k_4 . Нека P е точка, нележаща върху описаната за петъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5$ окръжност k . С $k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{44}$ и k_{45} означаваме Симсъновите окръжности на точката P съответно спрямо четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$. Експериментите с GSP показват, че е изпълнена следната:

Теорема 2. Ако петъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5$ е вписан в окръжност k и точката P не

(както това се случва с точките P_1, P_2 и P_3 при триъгълника). Експериментите с програмата The Geometer's Sketchpad (GSP) потвърждават нашите очаквания. Така стигаме до следната

Теорема 1. Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на една окръжност k_4 .

По аналогия с правата на Симсън породената от перпендикулярна окръжност k_4 по описания начин за точка P от равнината на вписан в окръж-



Фигура 3

лежи върху k , то центровете Ω_{41} , Ω_{42} , Ω_{43} , Ω_{44} и Ω_{45} съответно на Симсъновите окръжности k_{41} , k_{42} , k_{43} , k_{44} и k_{45} лежат на една окръжност k_5 .

Окръжността k_5 ще наричаме Симсънова окръжност за P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5$ (фиг. 3).

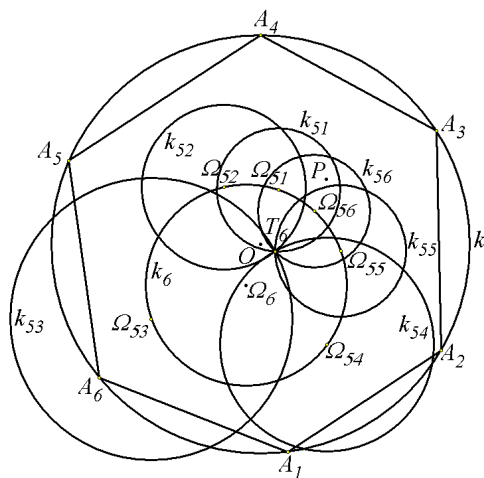
4. Симсънова окръжност и Симсънова точка спрямо вписан шестоъгълник. Прилагаме конструкцията на Симсънова окръжност спрямо вписан петоъгълник за вписан в окръжност k шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и точка P , нележаща върху k . С k_{51} , k_{52} , k_{53} , k_{54} , k_{55} и k_{56} означаваме Симсъновите окръжности на точката P съответно спрямо петоъгълниците $A_2A_3A_4A_5A_6$, $A_3A_4A_5A_6A_1$, $A_4A_5A_6A_1A_2$, $A_5A_6A_1A_2A_3$, $A_6A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Експериментите с GSP показват, че независимо от положението на P са изпълнени следните две теореми.

Теорема 3. Ако шестоъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то центровете Ω_{51} , Ω_{52} , Ω_{53} , Ω_{54} , Ω_{55} и Ω_{56} съответно на Симсъновите окръжности k_{51} , k_{52} , k_{53} , k_{54} , k_{55} и k_{56} лежат на една окръжност k_6 .

Теорема 4. Ако шестоъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то Симсъновите окръжности k_{51} , k_{52} , k_{53} , k_{54} , k_{55} и k_{56} минават през една точка T_6 .

Окръжността k_6 ще наричаме Симсънова окръжност за P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, а точката T_6 – точка на Симсън, съответна на P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (фиг. 4).



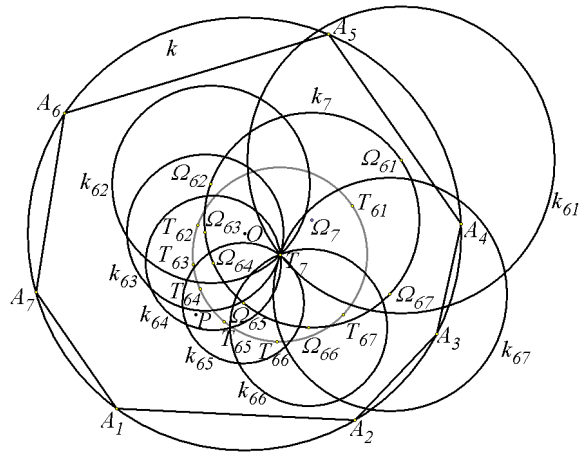
Фигура 4

5. Симсънова окръжност и Симсънова точка спрямо вписан седмоъгълник. Прилагаме идеята за построяване на Симсъновите окръжности k_5 и k_6 за седмоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, вписан в окръжност k и точка P , нележаща върху k . С k_{61} , k_{62} , k_{63} , k_{64} , k_{65} , k_{66} и k_{67} означаваме Симсъновите окръжности на точката P съответно спрямо шестоъгълниците $A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $A_3A_4A_5A_6A_7A_1$, $A_4A_5A_6A_7A_1A_2$, $A_5A_6A_7A_1A_2A_3$, $A_6A_7A_1A_2A_3A_4$, $A_7A_1A_2A_3A_4A_5$ и $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Освен това Симсъновите точки, съответни на P спрямо същите шестоъгълници,

означаваме с T_{61} , T_{62} , T_{63} , T_{64} , T_{65} , T_{66} и T_{67} .

Експериментите с GSP показват, че независимо от положението на P са изпълнени следните три теореми.

Теорема 5. Ако седмोगълникът $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то центровете Ω_{61} , Ω_{62} , Ω_{63} , Ω_{64} , Ω_{65} , Ω_{66} и Ω_{67} съответно на Симсъновите окръжности k_{61} , k_{62} , k_{63} , k_{64} , k_{65} , k_{66} и k_{67} лежат на една окръжност k_7 .



Фигура 5

Теорема 6. Ако седмोगълникът $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то Симсъновите окръжности k_{61} , k_{62} , k_{63} , k_{64} , k_{65} , k_{66} и k_{67} минават през една точка T_7 .

Теорема 7. Ако седмोगълникът $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то точките на Симсън T_{61} , T_{62} , T_{63} , T_{64} , T_{65} , T_{66} и T_{67} , съответни на P , лежат на една окръжност k_7 с център точката на Симсън T_7 .

Окръжността k_7 ще наричаме Симсънова окръжност за P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, точката T_7 – точка на Симсън, съответна на P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, а окръжността k_7 – втора окръжност на Симсън за P спрямо $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ (фиг. 5).

6. Симсънови окръжности и точки на Симсън за вписан n -ъгълник. Ако с разсъждения, подобни на вече изложените, за $n-1$ -ъгълник $A_1A_2 \dots A_{n-1}$, вписан в окръжност k , и точка P , нележаща на k , сме получили понятията Симсънова окръжност k_{n-1} ($n \geq 5$), точка на Симсън T_{n-1} ($n \geq 7$), съответна на P и втора окръжност на Симсън k_{n-1} ($n \geq 8$), то с индуктивни съображения стигаме до следните твърдения.

Теорема 8. Ако n -ъгълникът $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 5$) е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то центровете на Симсъновите окръжности на P спрямо всички $n-1$ -ъгълници, вписани в k , лежат на една окръжност k_n .

Теорема 9. Ако n -ъгълникът $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 6$) е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то Симсъновите окръжности на P спрямо всички $n-1$ -ъгълници, вписани в k , минават през една точка T_n .

Теорема 10. Ако n -ъгълникът $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 7$) е вписан в окръжност k и точката P не лежи върху k , то точките на Симсън, съответни на P спрямо всички $n-1$ -ъгълници, вписани в k , лежат на една окръжност $\bar{k}_n$ с център точката на Симсън T_n .

Окръжността k_n , точката T_n и окръжността $\bar{k}_n$ наричаме съответно Симсънова окръжност за P , точка на Симсън, съответна на P , и втора окръжност на Симсън за P спрямо $A_1 A_2 \dots A_n$.

7. Доказателства на теоремите. Извършените наблюдения с GSP доведоха до формулиране на съответни резултати. Узаконяването на тези резултати обаче се нуждае от доказателство. Затова преминаваме към доказване на формулираните теореми. Получените конфигурации ще разгледаме в комплексната равнина, като описаната около многоъгълника $A_1 A_2 \dots A_n$ окръжност k ще считаме за единична. Както обикновено, афиксите на точките ще означаваме със съответните им малки букви. От казаното следва, че при всяко $n \geq 4$ са изпълнени равенствата $a_j \bar{a}_j = 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

7.1. Доказателство на теорема 1. От равенството, чрез което се определя ортогоналната проекция на точка върху хорда от единичната окръжност за петите P_{12} , P_{23} , P_{34} и P_{41} на перпендикулярите, спуснати от точка P съответно върху правите $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ и $A_4 A_1$, намираме, че са изпълнени равенствата:

$$(1) \quad p_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + p - a_1 a_2 \bar{p}), \quad p_{23} = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + p - a_2 a_3 \bar{p}),$$

$$p_{34} = \frac{1}{2}(a_3 + a_4 + p - a_3 a_4 \bar{p}), \quad p_{41} = \frac{1}{2}(a_4 + a_1 + p - a_4 a_1 \bar{p}).$$

Петите P_1 , P_2 , P_3 и P_4 на перпендикулярите през P съответно върху правите $P_{12} P_{41}$, $P_{12} P_{23}$, $P_{23} P_{34}$ и $P_{34} P_{41}$ определяме по следния начин. От условието $(p_{41} - p_{12})(\bar{p} - \bar{p}_1) + (\bar{p}_{41} - \bar{p}_{12})(p - p_1) = 0$ за перпендикулярност на PP_1 и $P_{12} P_{41}$ и (1) имаме $(a_1 - p)p_1 - a_1 a_2 a_4 (1 - a_1 \bar{p})\bar{p}_1 = (a_1 - p)p - a_1 a_2 a_4 (1 - a_1 \bar{p})\bar{p}$. От условието $(\bar{p}_{41} - \bar{p}_{12})p_1 - (p_{41} - p_{12})\bar{p}_1 = \bar{p}_{41} p_{12} - p_{12} \bar{p}_{41}$ за колинеарност на точките P_1 , P_{12} и P_{41} следва

$$2(a_1 - p)p_1 + 2a_1 a_2 a_4 (1 - a_1 \bar{p})\bar{p}_1 =$$

$$= -p^2 - a_1^2 a_2 a_4 \bar{p}^2 + a_1(a_2 + a_4)p\bar{p} - (a_2 + a_4)p - a_1^2(a_2 + a_4)\bar{p} + (a_1 + a_2$$

От получените две равенства намираме

$$(2) \quad p_1 = \frac{1}{4(a_1 - p)} \left[-3p^2 + a_1^2 a_2 a_4 \bar{p}^2 + a_1(a_2 + a_4)p\bar{p} + \right.$$

$$\left. + (2a_1 - a_2 - a_4)p - a_1(a_1 a_2 + a_1 a_4 + 2a_2 a_4)\bar{p} + (a_1 + a_2)(a_1 + a_4) \right].$$

Аналогично се получават равенствата

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{1}{4(a_1 - p)} \left[-3p^2 + a_2^2 a_1 a_3 \bar{p}^2 + a_2(a_1 + a_3) p \bar{p} + \right. \\
 &\quad \left. + (2a_2 - a_1 - a_3) p - a_2(a_2 a_1 + a_2 a_3 + 2a_1 a_3) \bar{p} + (a_2 + a_1)(a_2 + a_3) \right], \\
 (3) \quad p_3 &= \frac{1}{4(a_3 - p)} \left[-3p^2 + a_3^2 a_2 a_4 \bar{p}^2 + a_3(a_2 + a_4) p \bar{p} + \right. \\
 &\quad \left. + (2a_3 - a_2 - a_4) p - a_3(a_3 a_2 + a_3 a_4 + 2a_2 a_4) \bar{p} + (a_3 + a_2)(a_3 + a_4) \right], \\
 p_4 &= \frac{1}{4(a_4 - p)} \left[-3p^2 + a_4^2 a_1 a_3 \bar{p}^2 + a_4(a_1 + a_3) p \bar{p} + \right. \\
 &\quad \left. + (2a_4 - a_1 - a_3) p - a_4(a_4 a_1 + a_4 a_3 + 2a_1 a_3) \bar{p} + (a_4 + a_1)(a_4 + a_3) \right].
 \end{aligned}$$

От (2) и (3) след известни пресмятания получаваме равенствата:

$$\begin{aligned}
 p_1 - p_2 &= -\frac{p + a_1 a_2 \bar{p} - a_1 - a_2}{4(a_1 - p)(a_2 - p)} \left[(a_1 a_4 - a_2 a_3) p \bar{p} + (a_3 - a_4) p + a_1 a_2 (a_3 - a_4) \bar{p} + a_2 a_4 - a_1 a_3 \right], \\
 p_2 - p_3 &= -\frac{p + a_2 a_3 \bar{p} - a_2 - a_3}{4(a_2 - p)(a_3 - p)} \left[(a_2 a_1 - a_3 a_4) p \bar{p} + (a_4 - a_1) p + a_2 a_3 (a_4 - a_1) \bar{p} + a_3 a_1 - a_2 a_4 \right], \\
 p_3 - p_4 &= -\frac{p + a_3 a_4 \bar{p} - a_3 - a_4}{4(a_3 - p)(a_4 - p)} \left[(a_3 a_2 - a_4 a_1) p \bar{p} + (a_1 - a_2) p + a_3 a_4 (a_1 - a_2) \bar{p} + a_4 a_2 - a_3 a_1 \right], \\
 p_4 - p_1 &= -\frac{p + a_4 a_1 \bar{p} - a_4 - a_1}{4(a_4 - p)(a_1 - p)} \left[(a_4 a_3 - a_1 a_2) p \bar{p} + (a_2 - a_3) p + a_4 a_1 (a_2 - a_3) \bar{p} + a_1 a_3 - a_4 a_2 \right], \\
 p_1 - p_3 &= \frac{a_3 - a_1}{4(a_1 - p)(a_3 - p)} \left\{ (a_2 + a_4) p^2 \bar{p} + a_2 a_4 (a_1 + a_3) p \bar{p}^2 - p^2 - a_1 a_2 a_3 a_4 \bar{p}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - [(a_1 + a_3)(a_2 + a_4) + 2a_2 a_4] p \bar{p} + (a_1 + a_3) p + a_1 a_3 (a_2 + a_4) \bar{p} + a_2 a_4 - a_1 a_3 \right\}, \\
 p_2 - p_4 &= \frac{a_4 - a_2}{4(a_2 - p)(a_4 - p)} \left\{ (a_1 + a_3) p^2 \bar{p} + a_1 a_3 (a_2 + a_4) p \bar{p}^2 - p^2 - a_1 a_2 a_3 a_4 \bar{p}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - [(a_2 + a_4)(a_1 + a_3) + 2a_1 a_3] p \bar{p} + (a_2 + a_4) p + a_2 a_4 (a_1 + a_3) \bar{p} + a_1 a_3 - a_2 a_4 \right\}.
 \end{aligned}$$

От (2) и (3) следват още равенствата:

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_1 &= \frac{1}{4a_1 a_2 a_4 (1 - a_1 \bar{p})} \left[p^2 - 3a_1^2 a_2 a_4 \bar{p}^2 + a_1(a_2 + a_4) p \bar{p} - (2a_1 + a_2 + a_4) p + \right. \\
 &\quad \left. + a_1(2a_2 a_4 - a_1 a_2 - a_1 a_4) \bar{p} + (a_1 + a_2)(a_1 + a_4) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_2 &= \frac{1}{4a_1a_2a_3(1-a_1\bar{p})} \left[p^2 - 3a_2^2a_1a_3\bar{p}^2 + a_2(a_1+a_3)p\bar{p} - (2a_2+a_1+a_3)p + \right. \\
 &\quad \left. + a_2(2a_1a_3 - a_2a_1 - a_2a_3)\bar{p} + (a_2+a_1)(a_2+a_3) \right], \\
 \bar{p}_3 &= \frac{1}{4a_2a_3a_4(1-a_3\bar{p})} \left[p^2 - 3a_3^2a_2a_4\bar{p}^2 + a_3(a_2+a_4)p\bar{p} - (2a_3+a_2+a_4)p + \right. \\
 &\quad \left. + a_3(2a_2a_4 - a_3a_2 - a_3a_4)\bar{p} + (a_3+a_2)(a_3+a_4) \right], \\
 \bar{p}_4 &= \frac{1}{4a_1a_3a_4(1-a_4\bar{p})} \left[p^2 - 3a_4^2a_1a_3\bar{p}^2 + a_4(a_1+a_3)p\bar{p} - (2a_4+a_1+a_3)p + \right. \\
 &\quad \left. + a_4(2a_1a_3 - a_4a_1 - a_4a_3)\bar{p} + (a_4+a_1)(a_4+a_3) \right]. \\
 \bar{p}_1 - \bar{p}_2 &= -\frac{(a_1-p)(a_2-p)(p_1-p_2)}{a_1a_2a_3a_4(1-a_1\bar{p})(1-a_2\bar{p})}, \quad \bar{p}_2 - \bar{p}_3 = -\frac{(a_2-p)(a_3-p)(p_2-p_3)}{a_1a_2a_3a_4(1-a_2\bar{p})(1-a_3\bar{p})}, \\
 \bar{p}_3 - \bar{p}_4 &= -\frac{(a_3-p)(a_4-p)(p_3-p_4)}{a_1a_2a_3a_4(1-a_3\bar{p})(1-a_4\bar{p})}, \quad \bar{p}_4 - \bar{p}_1 = -\frac{(a_4-p)(a_1-p)(p_4-p_1)}{a_1a_2a_3a_4(1-a_4\bar{p})(1-a_1\bar{p})}, \\
 \bar{p}_1 - \bar{p}_3 &= \frac{(a_3-a_1)(a_2-p)(a_4-p)(p_2-p_4)}{a_1a_2a_3a_4(a_4-a_1)(1-a_1\bar{p})(1-a_3\bar{p})}, \\
 \bar{p}_2 - \bar{p}_4 &= -\frac{(a_4-a_2)(a_1-p)(a_3-p)(p_1-p_3)}{a_1a_2a_3a_4(a_3-a_1)(1-a_2\bar{p})(1-a_4\bar{p})}
 \end{aligned}$$

От тези равенства следва, че $\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_3}{\bar{p}_2 - \bar{p}_3} : \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_4}{\bar{p}_2 - \bar{p}_4} = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} : \frac{p_1 - p_4}{p_2 - p_4}$. Следователно точките P_1, P_2, P_3 и P_4 лежат на една окръжност k_4 . С това теорема 1 е доказана

Тъй като теорема 1 е в основата на всички следващи резултати, ще определим центъра Ω_4 и радиуса R_4 на окръжността k_4 . Уравнението на k_4 е $(z - \omega_4)(\bar{z} - \bar{\omega}_4) = R_4^2$, което записваме във вида $z\bar{z} - \bar{\omega}_4z - \omega_4\bar{z} + \omega_4\bar{\omega}_4 = R_4^2$. Оттук имаме $\bar{p}_k\omega + p_k\bar{\omega}_4 = p_k\bar{p}_k + R_4^2 - \omega_4\bar{\omega}_4$ ($k=1,2,3,4$). Тези равенства водят до системата уравнения $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)\omega + (p_1 - p_2)\bar{\omega} = p_1\bar{p}_1 - p_2\bar{p}_2$, $(\bar{p}_2 - \bar{p}_3)\omega + (p_2 - p_3)\bar{\omega} = p_2\bar{p}_2 - p_3\bar{p}_3$. Като използваме (2), (3) и равенствата за $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, намираме

$$\begin{aligned}
 p_1\bar{p}_1 - p_2\bar{p}_2 &= -\frac{p + a_1a_2\bar{p} - a_1 - a_2}{16a_1a_2a_3a_4(a_1 - p)(a_2 - p)(1 - a_1\bar{p})(1 - a_2\bar{p})} \times \\
 &\times \left[(a_1a_4 - a_2a_3)p\bar{p} + (a_3 - a_4)p + a_1a_2(a_3 - a_4)\bar{p} + a_2a_4 - a_1a_3 \right] \times \\
 &\times \left\{ -3p^3 + 3a_1^2a_2^2a_3a_4\bar{p}^3 + a_1a_2p^2\bar{p} - a_1a_2a_3a_4p\bar{p}^2 + 2(a_1 + a_2)p^2 - 2a_1a_2a_3a_4(a_1 + a_2)\bar{p}^2 - \right. \\
 &- (a_1 + a_2)(a_1a_2 - a_3a_4)p\bar{p} + (a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2 - a_3a_4)p + \left[a_1^2a_2^2 + a_3a_4(a_1a_2 - a_1^2 - a_2^2) \right] \bar{p} - \\
 &- (a_1 + a_2)(a_1a_2 - a_3a_4) \left. \right\}, \\
 p_2\bar{p}_2 - p_3\bar{p}_3 &= -\frac{p + a_2a_3\bar{p} - a_2 - a_3}{16a_1a_2a_3a_4(a_2 - p)(a_3 - p)(1 - a_2\bar{p})(1 - a_3\bar{p})} \times \\
 &\times \left[(a_2a_1 - a_3a_4)p\bar{p} + (a_4 - a_1)p + a_2a_3(a_4 - a_1)\bar{p} + a_3a_1 - a_2a_4 \right] \times \\
 &\times \left\{ -3p^3 + 3a_1a_2^2a_3^2a_4\bar{p}^3 + a_2a_3p^2\bar{p} - a_1a_2a_3a_4p\bar{p}^2 + 2(a_2 + a_3)p^2 - 2a_1a_2a_3a_4(a_2 + a_3)\bar{p}^2 - \right. \\
 &- (a_2 + a_3)(a_4a_1 - a_2a_3)p\bar{p} + (a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3 - a_4a_1)p + \left[a_2^2a_3^2 + a_4a_1(a_2a_3 - a_2^2 - a_3^2) \right] \bar{p} - \\
 &- (a_2 + a_3)(a_4a_1 - a_2a_3) \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Тези равенства, заместени в системата уравнения, водят до определяне на ω_4 чрез формулите:

$$\begin{aligned}
 \omega_4 &= \frac{\sigma_{44}\bar{p}^3 - \sigma_{34}\bar{p}^2 + \sigma_{24}\bar{p} - \sigma_{14} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \\
 \bar{\omega}_4 &= \frac{p^3 - \sigma_{14}p^2 + \sigma_{24}p - \sigma_{34} + 3\sigma_{44}p\bar{p}^2 - 2\sigma_{44}\bar{p}}{4\sigma_{44}(p\bar{p} - 1)},
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

където $\sigma_{14} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, $\sigma_{24} = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4$,
 $\sigma_{34} = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4$, $\sigma_{44} = a_1a_2a_3a_4$

От (4) за R_4 намираме равенството

$$\begin{aligned}
 R_4^2 &= (\omega - p_1)(\bar{\omega} - \bar{p}_1) = \frac{1}{16a_1a_2a_3a_4(p\bar{p} - 1)^2} \times \\
 &\times \left[(a_2 + a_4)p^2\bar{p} + a_2a_4(a_1 + a_3)p\bar{p}^2 - p^2 - a_1a_2a_3a_4\bar{p}^2 - \right. \\
 &- (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + 2a_2a_4)p\bar{p} + (a_1 + a_3)p + a_1a_3(a_2 + a_4)\bar{p} + a_2a_4 - a_1a_3 \left. \right] \times \\
 &\times \left[(a_1 + a_3)p^2\bar{p} + a_1a_3(a_2 + a_4)p\bar{p}^2 - p^2 - a_1a_2a_3a_4\bar{p}^2 - \right. \\
 &- (a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + 2a_1a_3)p\bar{p} + (a_2 + a_4)p + a_2a_4(a_1 + a_3)\bar{p} + a_1a_3 - a_2a_4 \left. \right].
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Забележка. Равенствата (4) и (5) са определени като център и радиус на окръжността, описана около $\Delta P_1 P_2 P_3$. Заместването на p_4 и $\bar{p}_4$ в уравнението на тази окръжност показва, че те също са решение на това уравнение. Това означава, че P_4 лежи върху описаната за $\Delta P_1 P_2 P_3$ окръжност. Така получаваме още едно доказателство на теорема 1.

7.2. Доказателство на теорема 2. С s_{kj} означаваме k -ия симетричен полином на тези от числата a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 , от които е изключено a_j ($k=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5$), т.е. изпълнени са равенствата: $s_{11}=a_2+a_3+a_4+a_5$, $s_{12}=a_3+a_4+a_5+a_1$, $s_{13}=a_4+a_5+a_1+a_2$, $s_{14}=a_5+a_1+a_2+a_3$, $s_{15}=a_1+a_2+a_3+a_4$, $s_{21}=a_2a_3+a_2a_4+a_2a_5+a_3a_4+a_3a_5+a_4a_5$, $s_{22}=a_3a_4+a_3a_5+a_3a_1+a_4a_5+a_4a_1+a_5a_6$, $s_{23}=a_4a_5+a_4a_1+a_4a_2+a_5a_1+a_5a_2+a_1a_2$, $s_{24}=a_5a_1+a_5a_2+a_5a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$, $s_{25}=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4$, $s_{31}=a_2a_3a_4+a_2a_3a_5+a_2a_4a_5+a_3a_4a_5$, $s_{32}=a_3a_4a_5+a_3a_4a_1+a_3a_5a_1+a_4a_5a_1$, $s_{33}=a_4a_5a_1+a_4a_5a_2+a_4a_1a_2+a_5a_1a_2$, $s_{34}=a_5a_1a_2+a_5a_1a_3+a_5a_2a_3+a_1a_2a_3$, $s_{35}=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4$, $s_{41}=a_2a_3a_4a_5$, $s_{42}=a_3a_4a_5a_1$, $s_{43}=a_4a_5a_1a_2$, $s_{44}=a_5a_1a_2a_3$, $s_{45}=a_1a_2a_3a_4$. От (4) следва, че афиксите на центровете $\Omega_{41}, \Omega_{42}, \Omega_{43}, \Omega_{44}$ и Ω_{45} , съответно на Симсъновите окръжности $k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{44}$ и k_{45} , се изразяват с равенствата:

$$\begin{aligned}\omega_{41} &= \frac{s_{41}\bar{p}^3 - s_{31}\bar{p}^2 + s_{21}\bar{p} - s_{11} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \quad \bar{\omega}_{41} = \frac{p^3 - s_{11}p^2 + s_{21}p - s_{31} + 3s_{41}p\bar{p}^2 - 2s_{41}\bar{p}}{4s_{41}(p\bar{p} - 1)}, \\ \omega_{42} &= \frac{s_{42}\bar{p}^3 - s_{32}\bar{p}^2 + s_{22}\bar{p} - s_{12} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \quad \bar{\omega}_{42} = \frac{p^3 - s_{12}p^2 + s_{22}p - s_{32} + 3s_{42}p\bar{p}^2 - 2s_{42}\bar{p}}{4s_{42}(p\bar{p} - 1)}, \\ \omega_{43} &= \frac{s_{43}\bar{p}^3 - s_{33}\bar{p}^2 + s_{23}\bar{p} - s_{13} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \quad \bar{\omega}_{43} = \frac{p^3 - s_{13}p^2 + s_{23}p - s_{33} + 3s_{43}p\bar{p}^2 - 2s_{43}\bar{p}}{4s_{43}(p\bar{p} - 1)}, \\ \omega_{44} &= \frac{s_{44}\bar{p}^3 - s_{34}\bar{p}^2 + s_{24}\bar{p} - s_{14} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \quad \bar{\omega}_{44} = \frac{p^3 - s_{14}p^2 + s_{24}p - s_{34} + 3s_{44}p\bar{p}^2 - 2s_{44}\bar{p}}{4s_{44}(p\bar{p} - 1)}, \\ \omega_{45} &= \frac{s_{45}\bar{p}^3 - s_{35}\bar{p}^2 + s_{25}\bar{p} - s_{15} + 3p^2\bar{p} - 2p}{4(p\bar{p} - 1)}, \quad \bar{\omega}_{45} = \frac{p^3 - s_{15}p^2 + s_{25}p - s_{35} + 3s_{45}p\bar{p}^2 - 2s_{45}\bar{p}}{4s_{45}(p\bar{p} - 1)}.\end{aligned}$$

Нека Ω_5 и R_5 са съответно центърът и радиусът на описаната за $\Delta\Omega_{41}\Omega_{42}\Omega_{43}$ окръжност k_5 . Както в случая с четириъгълника, от уравнението на k_5 и горните равенства определяме системата уравнения:

$$\begin{aligned}4(p\bar{p}-1)(a_3-p)(a_4-p)(a_5-p)z + 4(p\bar{p}-1)(1-a_3\bar{p})(1-a_4\bar{p})(1-a_5\bar{p})\sigma_{55}\bar{z} &= z_{12}, \\ 4(p\bar{p}-1)(a_4-p)(a_5-p)(a_1-p)z + 4(p\bar{p}-1)(1-a_4\bar{p})(1-a_5\bar{p})(1-a_1\bar{p})\sigma_{55}\bar{z} &= z_{23},\end{aligned}$$

където

$$z_{12} = 3\sigma_{55}a_3a_4a_5p\bar{q}^5 - 3p^5\bar{p} + a_3a_4a_5p^3\bar{p}^2 - \sigma_{55}p^2\bar{p}^3 + 3(a_3+a_4+a_5)p^4\bar{p} -$$

$$\begin{aligned}
 & -3\sigma_{55}(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3)p\bar{p}^4 + 2p^4 - 2\sigma_{55}a_3a_4a_5\bar{p}^4 - 4(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3)p^3\bar{p} + \\
 & + 4\sigma_{55}(a_3 + a_4 + a_5)p\bar{p}^3 + [a_1a_2(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3) - a_3a_4a_5(a_3 + a_4 + a_5)]p^2\bar{p}^2 + \\
 & + \sigma_{55}(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3)\bar{p}^3 - (a_3 + a_4 + a_5)p^3 + \\
 & + [a_3a_4^2 + a_3^2a_4 + a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_3^2 + a_5^2a_3 - a_1a_2(a_3 + a_4 + a_5) + 6a_3a_4a_5]p^2\bar{p} + \\
 & + [a_3a_4a_5(a_3 + a_4 + a_5) - a_1a_2(a_3a_4^2 + a_3^2a_4 + a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_3^2 + a_5^2a_3) - 6\sigma_{55}]p\bar{p}^2 - \\
 & - (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_1a_2)p^2 + [a_1a_2(a_3^2a_4^2 + a_4^2a_5^2 + a_5^2a_3^2) - a_3^2a_4^2a_5^2]\bar{p}^2 + \\
 & + [a_1a_2(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) - (a_3^2a_4^2 + a_4^2a_5^2 + a_5^2a_3^2) + \\
 & + 2a_1a_2(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3) - 2a_3a_4a_5(a_3 + a_4 + a_5)]p\bar{p} + \\
 & + [a_3a_4^2 + a_3^2a_4 + a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_3^2 + a_5^2a_3 - a_1a_2(a_3 + a_4 + a_5)]p + \\
 & + [a_3a_4a_5(a_3 + a_4 + a_5) - a_1a_2(a_3a_4^2 + a_3^2a_4 + a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_3^2 + a_5^2a_3)]\bar{p} + \\
 & + a_1a_2(a_3a_4 + a_4a_5 + a_5a_3) - a_3a_4a_5(a_3 + a_4 + a_5) \\
 z_{23} = & 3\sigma_{55}a_4a_5a_1p\bar{q}^5 - 3p^5\bar{p} + a_4a_5a_1p^3\bar{p}^2 - \sigma_{55}p^2\bar{p}^3 + 3(a_4 + a_5 + a_1)p^4\bar{p} - \\
 & - 3\sigma_{55}(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4)p\bar{p}^4 + 2p^4 - 2\sigma_{55}a_4a_5a_1\bar{p}^4 - 4(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4)p^3\bar{p} + \\
 & + 4\sigma_{55}(a_4 + a_5 + a_1)p\bar{p}^3 + [a_2a_3(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4) - a_4a_5a_1(a_4 + a_5 + a_1)]p^2\bar{p}^2 + \\
 & + \sigma_{55}(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4)\bar{p}^3 - (a_4 + a_5 + a_1)p^3 + \\
 & + [a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_1^2 + a_5^2a_1 + a_1a_4^2 + a_1^2a_4 - a_2a_3(a_4 + a_5 + a_1) + 6a_4a_5a_1]p^2\bar{p} + \\
 & + [a_4a_5a_1(a_4 + a_5 + a_1) - a_2a_3(a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_1^2 + a_5^2a_1 + a_1a_4^2 + a_1^2a_4) - 6\sigma_{55}]p\bar{p}^2 - \\
 & - (a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 - a_2a_3)p^2 + [a_2a_3(a_4^2a_5^2 + a_5^2a_1^2 + a_1^2a_4^2) - a_4^2a_5^2a_1^2]\bar{p}^2 + \\
 & + [a_2a_3(a_4^2 + a_5^2 + a_1^2) - (a_4^2a_5^2 + a_5^2a_1^2 + a_1^2a_4^2) + \\
 & + 2a_2a_3(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4) - 2a_4a_5a_1(a_4 + a_5 + a_1)]p\bar{p} + \\
 & + [a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_1^2 + a_5^2a_1 + a_1a_4^2 + a_1^2a_4 - a_2a_3(a_4 + a_5 + a_1)]p + \\
 & + [a_4a_5a_1(a_4 + a_5 + a_1) - a_2a_3(a_4a_5^2 + a_4^2a_5 + a_5a_1^2 + a_5^2a_1 + a_1a_4^2 + a_1^2a_4)]\bar{p} + \\
 & + a_2a_3(a_4a_5 + a_5a_1 + a_1a_4) - a_4a_5a_1(a_4 + a_5 + a_1)
 \end{aligned}$$

След решаване на системата намираме

$$(6) \quad \omega_5 = \frac{\sigma_{55}\bar{p}^4 - \sigma_{45}\bar{p}^3 + \sigma_{35}\bar{p}^2 - \sigma_{25}\bar{p} + \sigma_{15} + 3p^3\bar{p}^2 - 5p^2\bar{p} + p}{4(p\bar{p} - 1)^2},$$

$$(7) \quad R_5^2 = (a_1 - p)(a_2 - p)(a_3 - p)(a_4 - p)(a_5 - p) \times \\ \times \frac{(1 - a_1 \bar{p})(1 - a_2 \bar{p})(1 - a_3 \bar{p})(1 - a_4 \bar{p})(1 - a_5 \bar{p})}{16\sigma_{55}(p\bar{p} - 1)^4},$$

където σ_{k5} е k -ият симетричен полином на a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 .

От симетричния вид на (6) и (7) по отношение на a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 следва, че точките Ω_{44} и Ω_{45} също лежат върху окръжността k_5 . С това теорема 3 е доказана.

7.3. Доказателство на теореми 3 и 4. С s_{kj} означаваме k -ия симетричен полином на тези от числата a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 , от които е изключено a_j ($k = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). От (6), както в случая с петобъгълника, изразяваме афиксите на центровете $\Omega_{51}, \Omega_{52}, \Omega_{53}, \Omega_{54}, \Omega_{55}$ и Ω_{56} , съответно на Симсъновите окръжности $k_{51}, k_{52}, k_{53}, k_{54}, k_{55}$ и k_{56} , чрез полиномите s_{kj} ($k = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Нека Ω_6 и R_6 са съответно центърът и радиусът на описаната за $\Delta\Omega_{51}\Omega_{52}\Omega_{53}$ окръжност k_6 . Както в случая с четириъгълника, от уравнението на k_6 и равенствата за $\omega_{51}, \omega_{52}, \omega_{53}$ и техните комплексно спрегнати определяме системата уравнения:

$$\begin{aligned} & -4(p\bar{p} - 1)^2 (a_3 - p)(a_4 - p)(a_5 - p)(a_6 - p)z + \\ & + 4(p\bar{p} - 1)^2 (1 - a_3 \bar{p})(1 - a_4 \bar{p})(1 - a_5 \bar{p})(1 - a_6 \bar{p})\sigma_{66}\bar{z} = u_{12}, \\ & -4(p\bar{p} - 1)^2 (a_4 - p)(a_5 - p)(a_6 - p)(a_1 - p)z + \\ & + 4(p\bar{p} - 1)^2 (1 - a_4 \bar{p})(1 - a_5 \bar{p})(1 - a_6 \bar{p})(1 - a_1 \bar{p})\sigma_{66}\bar{z} = u_{23}, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} u_{12} = & 3\sigma_{66}a_3a_4a_5a_6p^2\bar{p}^7 - 3p^7\bar{p}^2 + 3(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)p^6\bar{p}^2 + 5p^6\bar{p} - 5\sigma_{66}a_3a_4a_5a_6p\bar{p}^6 - \\ & - 3\sigma_{66}(a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_5a_6 + a_4a_5a_6)p^2\bar{p}^6 + a_3a_4a_5a_6p^4\bar{p}^3 - \sigma_{66}p^3\bar{p}^4 + \sigma_{66}a_3a_4a_5a_6\bar{p}^5 - \\ & - 3(a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6)p^5\bar{p}^2 - 5(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)p^5\bar{p} - p^5 + \\ & + 3\sigma_{66}(a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6)p^2\bar{p}^5 - 2\sigma_{66}(a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \\ & + 5\sigma_{66}(a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_5a_6 + a_4a_5a_6)p\bar{p}^5 + 2(a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_5a_6 + a_4a_5a_6)p^4\bar{p}^2 + \\ & + [a_1a_2(a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_5a_6 + a_4a_5a_6) - a_3a_4a_5a_6(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)]p^3\bar{p}^3 + \\ & + 6(a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6)p^4\bar{p} + \\ & + (a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6)[a_1a_2(a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - \\ & - (a_3a_4a_5 + a_3a_4a_6 + a_3a_5a_6 + a_4a_5a_6)]p^2\bar{p}^2 - 6\sigma_{66}(a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_4a_5 + a_4a_6 + a_5a_6)p\bar{p}^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + \right. \\
& + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) - a_1 a_2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) \left. \right] p^3 \bar{p}^2 + \\
& + \left\{ a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - a_1 a_2 \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + \right. \right. \\
& + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) \left. \right] - \sigma_{66} \left. \right\} p^2 \bar{p}^3 + \\
& + \left[a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - a_3^2 (a_4 + a_5 + a_6) - a_4^2 (a_5 + a_6 + a_3) - a_5^2 (a_6 + a_3 + a_4) - \right. \\
& - a_6^2 (a_3 + a_4 + a_5) - 8(a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) \left. \right] p^3 \bar{p} + \\
& + \left\{ 8\sigma_{66} (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) + \right. \\
& + a_1 a_2 \left[a_3^2 a_4^2 (a_5 + a_6) + a_3^2 a_5^2 (a_4 + a_6) + a_3^2 a_6^2 (a_4 + a_5) + a_4^2 a_5^2 (a_3 + a_6) + \right. \\
& + a_4^2 a_6^2 (a_3 + a_5) + a_5^2 a_6^2 (a_3 + a_4) \left. \right] \left. \right\} p \bar{p}^3 + \\
& + \left\{ a_3^2 a_4^2 a_5^2 + a_3^2 a_4^2 a_6^2 + a_3^2 a_5^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 a_6^2 - a_1 a_2 (a_3^2 a_4^2 + a_3^2 a_5^2 + a_3^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 + a_4^2 a_6^2 + a_5^2 a_6^2) \right. \\
& - 2a_1 a_2 \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + \right. \\
& + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) \left. \right] + 2a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - 11\sigma_{66} \left. \right\} p \bar{p}^2 + \\
& + \left\{ 11a_3 a_4 a_5 a_6 - 2a_1 a_2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + 2 \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + \right. \right. \\
& + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) \left. \right] - \\
& - a_1 a_2 (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + a_3^2 a_4^2 + a_3^2 a_5^2 + a_3^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 + a_4^2 a_6^2 + a_5^2 a_6^2 \left. \right\} p^2 \bar{p} + \\
& + (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6 - a_1 a_2) p^3 + \bar{p}^3 \left\{ a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^2 - \right. \\
& - a_1 a_2 \left[a_3^2 a_4^2 a_5^2 + a_3^2 a_4^2 a_6^2 + a_3^2 a_5^2 a_6^2 + a_4^2 a_5^2 a_6^2 + a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) \right] \left. \right\} \\
& + \left\{ a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - 2(a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) - \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + \right. \right. \\
& + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) \left. \right] \left. \right\} p^2 + \\
& + \left\{ a_1 a_2 \left[a_3^2 a_4^2 (a_5 + a_6) + a_3^2 a_5^2 (a_4 + a_6) + a_3^2 a_6^2 (a_4 + a_5) + a_4^2 a_5^2 (a_3 + a_6) + \right. \right. \\
& + a_4^2 a_6^2 (a_3 + a_5) + a_5^2 a_6^2 (a_3 + a_4) \left. \right] - a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) + \\
& + \sigma_{66} (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \left. \right\} \bar{p} + (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) \left[a_1 a_2 (a_3 + a_4 + a_5 + a_6) - \right. \\
& - (a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6) \left. \right] p \bar{p} + \left\{ a_3 a_4 a_5 a_6 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - \right. \\
& - a_1 a_2 \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + \right. \\
& + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) \left. \right] - 3\sigma_{66} \left. \right\} \bar{p} + \\
& + \left[a_3^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + a_4^2 (a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_5 a_6) + a_5^2 (a_3 a_4 + a_3 a_6 + a_4 a_6) + \right. \\
& + a_6^2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_4 a_5) - a_1 a_2 (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) + 3a_3 a_4 a_5 a_6 \left. \right] p +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +a_1a_2(a_3a_4a_5+a_3a_4a_6+a_3a_5a_6+a_4a_5a_6)-a_3a_4a_5a_6(a_3+a_4+a_5+a_6), \\
 u_{23} = & 3\sigma_{66}a_4a_5a_6a_1p^2\bar{p}^7-3p^7\bar{p}^2+3(a_4+a_5+a_6+a_1)p^6\bar{p}^2+5p^6\bar{p}-5\sigma_{66}a_4a_5a_6a_1p\bar{p}^6- \\
 & -3\sigma_{66}(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)p^2\bar{p}^6+a_4a_5a_6a_1p^4\bar{p}^3-\sigma_{66}p^3\bar{p}^4+\sigma_{66}a_4a_5a_6a_1\bar{p}^5- \\
 & -3(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)p^5\bar{p}^2-5(a_4+a_5+a_6+a_1)p^5\bar{p}-p^5+ \\
 & +3\sigma_{66}(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)p^2\bar{p}^5-2\sigma_{66}(a_4+a_5+a_6+a_1)p^2\bar{p}^4+ \\
 & +5\sigma_{66}(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)p\bar{p}^5+2(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)p^4\bar{p}^2+ \\
 & +[a_2a_3(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)-a_4a_5a_6a_1(a_4+a_5+a_6+a_1)]p^3\bar{p}^3+ \\
 & +6(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)p^4\bar{p}+ \\
 & +(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)[a_2a_3(a_4+a_5+a_6+a_1)- \\
 & -(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)]p^2\bar{p}^2-6\sigma_{66}(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)p\bar{p}^4+ \\
 & +[a_4^2(a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)+a_5^2(a_4a_6+a_4a_1+a_6a_1)+a_6^2(a_4a_1+a_4a_5+a_5a_1)+ \\
 & +a_1^2(a_4a_5+a_4a_6+a_5a_6)-a_2a_3(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)]p^3\bar{p}^2+ \\
 & +\{a_4a_5a_6a_1(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)-a_1a_2[a_4^2(a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)+ \\
 & +a_5^2(a_4a_6+a_4a_1+a_6a_1)+a_6^2(a_4a_1+a_4a_5+a_5a_1)+a_1^2(a_4a_5+a_4a_6+a_5a_6)]-\sigma_{66}\}p^2\bar{p}^3+ \\
 & +[a_2a_3(a_4+a_5+a_6+a_1)-a_4^2(a_5+a_6+a_1)-a_5^2(a_6+a_1+a_4)-a_6^2(a_1+a_4+a_5)- \\
 & -a_1^2(a_4+a_5+a_6)-8(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)]p^3\bar{p}+ \\
 & +\{8\sigma_{66}(a_4+a_5+a_6+a_1)-a_4a_5a_6a_1(a_4a_5a_6+a_4a_5a_1+a_4a_6a_1+a_5a_6a_1)+ \\
 & +a_2a_3[a_4^2a_5^2(a_6+a_1)+a_4^2a_6^2(a_1+a_5)+a_4^2a_1^2(a_5+a_6)+a_5^2a_6^2(a_1+a_4)+ \\
 & +a_5^2a_1^2(a_4+a_6)+a_6^2a_1^2(a_4+a_5)]\}p\bar{p}^3+ \\
 & +\{a_4^2a_5^2a_6^2+a_4^2a_5^2a_1^2+a_4^2a_6^2a_1^2+a_5^2a_6^2a_1^2-a_2a_3(a_4^2a_5^2+a_4^2a_6^2+a_4^2a_1^2+a_5^2a_6^2+a_5^2a_1^2+a_6^2a_1^2)- \\
 & -2a_2a_3[a_4^2(a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)+a_5^2(a_4a_6+a_4a_1+a_6a_1)+a_6^2(a_4a_1+a_4a_5+a_5a_1)+ \\
 & +a_1^2(a_4a_5+a_4a_6+a_5a_6)]+2a_4a_5a_6a_1(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)-11\sigma_{66}\}p\bar{p}^2+ \\
 & +\{11a_4a_5a_6a_1-2a_2a_3(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)+2[a_4^2(a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)+ \\
 & +a_5^2(a_4a_6+a_4a_1+a_6a_1)+a_6^2(a_4a_1+a_4a_5+a_5a_1)+a_1^2(a_4a_5+a_4a_6+a_5a_6)]- \\
 & -a_2a_3(a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_1^2)+a_4^2a_5^2+a_4^2a_6^2+a_4^2a_1^2+a_5^2a_6^2+a_5^2a_1^2+a_6^2a_1^2\}p^2\bar{p}+ \\
 & +(a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_1^2+a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1-a_2a_3)p^3+\bar{p}^3\{a_4^2a_5^2a_6^2a_1^2- \\
 & -a_2a_3[a_4^2a_5^2a_6^2+a_4^2a_5^2a_1^2+a_4^2a_6^2a_1^2+a_5^2a_6^2a_1^2+a_4a_5a_6a_1(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_1+a_5a_6+a_5a_1+a_6a_1)]\}+
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ a_2 a_3 (a_4 + a_5 + a_6 + a_1) - 2(a_4 a_3 a_6 + a_4 a_5 a_1 + a_4 a_6 a_1 + a_5 a_6 a_1) - [a_4^2 (a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) + \right. \\
 & \quad \left. + a_5^2 (a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_6 a_1) + a_6^2 (a_4 a_1 + a_4 a_5 + a_5 a_1) + a_1^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6)] \right\} p^2 + \\
 & + \left\{ a_2 a_3 [a_4^2 a_5^2 (a_6 + a_1) + a_4^2 a_6^2 (a_1 + a_5) + a_4^2 a_1^2 (a_5 + a_6) + a_5^2 a_6^2 (a_1 + a_4) + \right. \\
 & \quad \left. + a_5^2 a_1^2 (a_4 + a_6) + a_6^2 a_1^2 (a_4 + a_5)] - a_4 a_5 a_6 a_1 (a_4 a_3 a_6 + a_4 a_5 a_1 + a_4 a_6 a_1 + a_5 a_6 a_1) + \right. \\
 & \quad \left. + 2\sigma_{66} (a_4 + a_5 + a_6 + a_1) \right\} \bar{p}^2 + (a_4 a_3 + a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) [a_2 a_3 (a_4 + a_5 + a_6 + a_1) - \\
 & \quad - (a_4 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_1 + a_4 a_6 a_1 + a_5 a_6 a_1)] p \bar{p} + \{ a_4 a_5 a_6 a_1 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) - \\
 & \quad - a_2 a_3 [a_4^2 (a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) + a_5^2 (a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_6 a_1) + a_6^2 (a_4 a_1 + a_4 a_5 + a_5 a_1) + \\
 & \quad + a_1^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6)] - 3\sigma_{66} \} \bar{p} + \\
 & + [a_4^2 (a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) + a_5^2 (a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_6 a_1) + a_6^2 (a_4 a_1 + a_4 a_5 + a_5 a_1) + \\
 & + a_1^2 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - a_2 a_3 (a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_4 a_1 + a_5 a_6 + a_5 a_1 + a_6 a_1) + 3a_4 a_5 a_6 a_1] p + \\
 & + a_2 a_3 (a_4 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_1 + a_4 a_6 a_1 + a_5 a_6 a_1) - a_4 a_5 a_6 a_1 (a_4 + a_5 + a_6 + a_1).
 \end{aligned}$$

След решаване на системата намираме

$$(8) \quad \omega_6 = \frac{\sigma_{66} \bar{p}^5 - \sigma_{56} \bar{p}^4 + \sigma_{46} \bar{p}^3 - \sigma_{36} \bar{p}^2 + \sigma_{26} \bar{p} - \sigma_{16} + 3p^4 \bar{p}^3 - 8p^3 \bar{p}^2 + 6p^2 \bar{p}}{4(p\bar{p} - 1)^3},$$

$$(9) \quad R_6^2 = (a_1 - p)(a_2 - p)(a_3 - p)(a_4 - p)(a_5 - p)(a_6 - p) \times \\ \times \frac{(1 - a_1 \bar{p})(1 - a_2 \bar{p})(1 - a_3 \bar{p})(1 - a_4 \bar{p})(1 - a_5 \bar{p})(1 - a_6 \bar{p})}{16\sigma_{66} (p\bar{p} - 1)^6},$$

където σ_{k6} е k -ият симетричен полином на a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 .

От симетричния вид на (8) и (9) по отношение на a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 следва, че точките Ω_{54}, Ω_{55} и Ω_{56} също лежат върху окръжността k_6 . С това теорема 3 е доказана.

Сега след изваждане на уравненията на двойките окръжности k_{51}, k_{52} и k_{52}, k_{53} получаваме уравненията на радикалните оси на тези двойки окръжности съответно във вида:

$$\begin{aligned}
 (\bar{\omega}_{51} - \bar{\omega}_{52})z + (\omega_{51} - \omega_{52})\bar{z} &= \omega_{51}\bar{\omega}_{51} - \omega_{52}\bar{\omega}_{52} + R_{51}^2 - R_{52}^2, \\
 (\bar{\omega}_{52} - \bar{\omega}_{53})z + (\omega_{52} - \omega_{53})\bar{z} &= \omega_{52}\bar{\omega}_{52} - \omega_{53}\bar{\omega}_{53} + R_{52}^2 - R_{53}^2.
 \end{aligned}$$

След заместване на съответните стойности от (6) и (7) за решението на тази система уравнения получаваме

$$(10) \quad t_6 = \frac{-(\sigma_{66}\bar{p}^5 - \sigma_{56}\bar{p}^4 + \sigma_{46}\bar{p}^3 - \sigma_{36}\bar{p}^2 + \sigma_{26}\bar{p} - \sigma_{16}) + 3p^3\bar{p}^2 - 5p^2\bar{p} + p}{4(p\bar{p} - 1)^2}.$$

С непосредствена проверка се вижда, че числото t_6 удовлетворява уравнението на k_{51} . Оттук следва, че точката T_6 лежи върху k_{51} , а следователно и върху окръжностите k_{52} и k_{53} . Така получаваме, че окръжности k_{51} , k_{52} и k_{53} минават през една точка T_6 . От симетричния вид на (10) по отношение на a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 и a_6 следва, че окръжностите k_{54} , k_{55} и k_{56} също минават през точката T_6 . С това теорема 4 е доказана.

7.4. Доказателство на теореми 5 и 6. Както в случаите на петоъгълник и шестоъгълник за центъра Ω_7 и радиуса R_7 на окръжността k_7 , съдържаща центровете Ω_{61} , Ω_{62} , Ω_{63} , Ω_{64} , Ω_{65} , Ω_{66} и Ω_{67} съответно на Симсъновите окръжности k_{61} , k_{62} , k_{63} , k_{64} , k_{65} , k_{66} и k_{67} , получаваме следните резултати:

$$(11) \quad \omega_7 = \frac{1}{4(p\bar{p} - 1)^4} (\sigma_{77}\bar{p}^6 - \sigma_{67}\bar{p}^5 + \sigma_{57}\bar{p}^4 - \sigma_{47}\bar{p}^3 + \sigma_{37}\bar{p}^2 - \sigma_{27}\bar{p} + \sigma_{17} + 3p^5\bar{p}^4 - 11p^4\bar{p}^3 + 14p^3\bar{p}^2 - 6p^2\bar{p} - p),$$

$$(12) \quad R_7^2 = (a_1 - p)(a_2 - p)(a_3 - p)(a_4 - p)(a_5 - p)(a_6 - p)(a_7 - p) \times \\ \times \frac{(1 - a_1\bar{p})(1 - a_2\bar{p})(1 - a_3\bar{p})(1 - a_4\bar{p})(1 - a_5\bar{p})(1 - a_6\bar{p})(1 - a_7\bar{p})}{16\sigma_{77}(p\bar{p} - 1)^8},$$

където σ_{k7} е k -ият симетричен полином на a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 и a_7 .

Аналогично на случая с шестоъгълника получаваме, че Симсъновите окръжности k_{61} , k_{62} , k_{63} , k_{64} , k_{65} , k_{66} и k_{67} минават през точка T_7 , чийто афикс се изразява с формулата:

$$(13) \quad t_7 = \frac{-(\sigma_{77}\bar{p}^6 - \sigma_{67}\bar{p}^5 + \sigma_{57}\bar{p}^4 - \sigma_{47}\bar{p}^3 + \sigma_{37}\bar{p}^2 - \sigma_{27}\bar{p} + \sigma_{17}) + 3p^4\bar{p}^3 - 8p^3\bar{p}^2 + 6p^2\bar{p}}{4(p\bar{p} - 1)^3}.$$

Доказателството на теорема 7, отнасяща се за точките T_{61} , T_{62} , T_{63} , T_{64} , T_{65} , T_{66} , T_{67} и T_7 , ще получим като частен случай на теорема 10 при $n = 7$.

7.5. Доказателство на теореми 8, 9 и 10. За да докажем теореми 8, 9 и 10, е необходимо да намерим формули за ω_n , R_n^2 ($n \geq 5$) и t_n ($n \geq 6$), които обобщават вече получените. Навсякъде по-нататък σ_{jn} ще означава j -ия симетричен полином на n -те числа a_1 , a_2 , ..., a_n . От (7), (9) и (12) се вижда, че при $n \geq 5$, те се обобщават от формулата

$$(14) \quad R_n^2 = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k - p)(1 - a_k\bar{p})}{16\sigma_{nn}(p\bar{p} - 1)^{2(n-3)}},$$

където $\sigma_{nn} = a_1 a_2 \dots a_n$.

Така с (14), при $n \geq 5$, се изразява радиусът R_n на Симсъновата окръжност k_n . Относно центъра Ω_n на k_n и общата точка T_n на окръжностите $k_{1,1}, k_{n-1,2}, \dots, k_{n-1,n}$ съответните формули се нуждаят от повече изследвания. Формулите (5), (6), (8) и (11) могат да се запишат съответно по следния начин:

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \frac{\sigma_{44} \bar{u}^3 - \sigma_{34} \bar{u}^2 + \sigma_{24} \bar{u} - \sigma_{14} + \alpha_4}{4(p\bar{p}-1)}, \\ \omega_5 &= \frac{\sigma_{55} \bar{p}^4 - \sigma_{45} \bar{p}^3 + \sigma_{35} \bar{p}^2 - \sigma_{25} \bar{p} + \sigma_{15} + \alpha_5}{4(p\bar{p}-1)^2}, \\ \omega_6 &= \frac{\sigma_{66} \bar{p}^5 - \sigma_{56} \bar{p}^4 + \sigma_{46} \bar{p}^3 - \sigma_{36} \bar{p}^2 + \sigma_{26} \bar{p} - \sigma_{16} + \alpha_6}{4(p\bar{p}-1)^3}, \\ \omega_7 &= \frac{\sigma_{77} \bar{p}^6 - \sigma_{67} \bar{p}^5 + \sigma_{57} \bar{p}^4 - \sigma_{47} \bar{p}^3 + \sigma_{37} \bar{p}^2 - \sigma_{27} \bar{p} + \sigma_{17} + \alpha_7}{4(p\bar{p}-1)^4},\end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= 3p^2 \bar{p} - 2p = 3p(p\bar{p}-1) + p, \\ \alpha_5 &= 3p^3 \bar{p}^2 - 5p^2 \bar{p} + p = (p\bar{p}-1)\alpha_4 - p = 3p(p\bar{p}-1)^2 + p(p\bar{p}-1) - p, \\ \alpha_6 &= 3p^4 \bar{p}^3 - 8p^3 \bar{p}^2 + 6p^2 \bar{p} = (p\bar{p}-1)\alpha_5 + p = 3p(p\bar{p}-1)^3 + p(p\bar{p}-1)^2 - p(p\bar{p}-1) + p, \\ \alpha_7 &= 3p^5 \bar{p}^4 - 11p^4 \bar{p}^3 + 14p^3 \bar{p}^2 - 6p^2 \bar{p} - p = (p\bar{p}-1)\alpha_6 - p = \\ &= 3p(p\bar{p}-1)^4 + p(p\bar{p}-1)^3 - p(p\bar{p}-1)^2 + p(p\bar{p}-1) - p.\end{aligned}$$

Затога ω_n има вида

$$\omega_n = \frac{\sigma_{nn} \bar{p}^{n-1} - \sigma_{n-1,n} \bar{p}^{n-2} + \sigma_{n-2,n} \bar{p}^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} \sigma_{3n} \bar{p}^2 + (-1)^{n-1} \sigma_{2n} \bar{p} + (-1)^n \sigma_{1n} + \alpha_n}{4(p\bar{p}-1)^{n-3}},$$

където

$$\alpha_n = p \left[3(p\bar{p}-1)^{n-3} + (p\bar{p}-1)^{n-4} - (p\bar{p}-1)^{n-5} + \dots + (-1)^{n-1} (p\bar{p}-1) + (-1)^n \right].$$

Сега от формулата за сума на геометрична прогресия следва, че

$$(p\bar{p}-1)^{n-4} - (p\bar{p}-1)^{n-5} + \dots + (-1)^{n-1} (p\bar{p}-1) + (-1)^n = \frac{(p\bar{p}-1)^{n-3} + (-1)^n}{p\bar{p}}.$$

Това означава, че $\alpha_n = \frac{(3p\bar{p}+1)(p\bar{p}-1)^{n-3} + (-1)^n}{p\bar{p}}$. Оттук окончателно получаваме

$$(15) \quad \omega_n = \frac{(3p\bar{p}+1)(p\bar{p}-1)^{n-3} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-k,n} \bar{p}^{n-k}}{4\bar{p}(p\bar{p}-1)^{n-3}}.$$

Аналогично на ω_n се получава, че при $n \geq 6$ формулата за t_n е следната:

$$(16) \quad t_n = \frac{(3p\bar{p}+1)(p\bar{p}-1)^{n-4} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-k,n} \bar{p}^{n-k}}{4\bar{p}(p\bar{p}-1)^{n-4}}.$$

От формулите на Виет за полиноми относно променливата p и равенства-та $\bar{\sigma}_k = \frac{\sigma_{n-k}}{\sigma_n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) следват зависимостите:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k p^{n-k} &= \prod_{k=1}^n (p - a_k) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (a_k - p), \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_{n-k} \bar{p}^{n-k} &= \prod_{k=1}^n (a_k \bar{p} - 1) = (-1)^n \prod_{k=1}^n (1 - a_k \bar{p}). \end{aligned}$$

Оттук (15) и (16) преминават съответно в равенствата:

$$(17) \quad \omega_n = \frac{(3p\bar{p}+1)(p\bar{p}-1)^{n-3} + \prod_{k=1}^n (a_k \bar{p} - 1)}{4\bar{p}(p\bar{p}-1)^{n-3}},$$

$$(18) \quad t_n = \frac{(3p\bar{p}+1)(p\bar{p}-1)^{n-4} - \prod_{k=1}^n (a_k \bar{p} - 1)}{4\bar{p}(p\bar{p}-1)^{n-4}}.$$

От (17) при $j = 1, 2, \dots, n$, като вземем предвид (14), получаваме равенствата

$$\begin{aligned} \omega_n - \omega_{n-1,j} &= \frac{(a_j - p) \prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k \bar{p} - 1)}{4(p\bar{p}-1)^{n-3}} = \frac{(-1)^{n-1} (a_j - p) \prod_{k=1, k \neq j}^n (1 - a_k \bar{p})}{4(p\bar{p}-1)^{n-3}}, \\ \bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1,j} &= \frac{(1 - a_j \bar{p}) \prod_{k=1, k \neq j}^n (p - a_k)}{4\sigma_{nn} (p\bar{p}-1)^{n-3}} = \frac{(-1)^{n-1} (1 - a_j \bar{p}) \prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k - p)}{4\sigma_{nn} (p\bar{p}-1)^{n-3}}, \end{aligned}$$

$$(\omega_n - \omega_{n-1,j})(\bar{\omega}_n - \bar{\omega}_{n-1,j}) = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k - p)(1 - a_k \bar{p})}{16\sigma_{nn} (p\bar{p}-1)^{2(n-3)}} = R_n^2.$$

С това теорема 8 е доказана.

От (17) и (18) при $j = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 6$), като вземем предвид (14), имаме

$$\omega_{n-1,j} - t_n = \frac{(-1)^{n-1} a_j \prod_{k=1, k \neq j}^n (1 - a_k \bar{p})}{4(p\bar{p} - 1)^{n-4}}, \quad \bar{\omega}_{n-1,j} - \bar{t}_n = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k - p)}{4a_j(p\bar{p} - 1)^{n-4} \prod_{k=1, k \neq j}^n a_k},$$

$$(\omega_{n-1,j} - t_n)(\bar{\omega}_{n-1,j} - \bar{t}_n) = \frac{\prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k - p)(1 - a_k \bar{p})}{16(p\bar{p} - 1)^{2(n-4)} \prod_{k=1, k \neq j}^n a_k} = R_{n-1,j}^2.$$

С това теорема 9 е доказана.

Теорема 9 не е изпълнена при $n = 5$, защото равенството (14) в общия случай не обобщава (5). Окръжностите k_{41} , k_{42} , k_{43} , k_{44} и k_{45} не притежават обща точка дори в случая, когато $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ е правилен петогълник. Съществуват обаче случаи, при които тези окръжности минават през една точка.

От (18) при $j = 1, 2, \dots, n$ ($n \geq 7$), като вземем предвид (14), получаваме равенствата

$$t_n - t_{n-1,j} = \frac{-(a_j - p) \prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k \bar{p} - 1)}{4(p\bar{p} - 1)^{n-4}} = \frac{(-1)^n (a_j - p) \prod_{k=1, k \neq j}^n (1 - a_k \bar{p})}{4(p\bar{p} - 1)^{n-4}},$$

$$\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1,j} = \frac{-(1 - a_j \bar{p}) \prod_{k=1, k \neq j}^n (p - a_k)}{4\sigma_n(p\bar{p} - 1)^{n-4}} = \frac{(-1)^n (1 - a_j \bar{p}) \prod_{k=1, k \neq j}^n (a_k - p)}{4\sigma_n(p\bar{p} - 1)^{n-4}},$$

$$(t_n - t_{n-1,j})(\bar{t}_n - \bar{t}_{n-1,j}) = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k - p)(a_k \bar{p} - 1)}{16\sigma_n(p\bar{p} - 1)^{2(n-4)}} = R_n^2(p\bar{p} - 1)^2.$$

Последното равенство показва, че точките $T_{n-1,1}$, $T_{n-1,2}$, $\dots$, $T_{n-1,n}$ се намират на едно и също разстояние от точката T_n , т.е. тези точки лежат на окръжност с център T_n . Това доказва теорема 10.

Ако с r_n означим радиуса на втората окръжност на Симсън за $A_1 A_2 \dots A_n$, от последното равенство следва $r_n^2 = R_n^2(p\bar{p} - 1)^2$. Това равенство записваме по следния начин $r_n = R_n |1 - p\bar{p}|$. Тъй като геометричният смисъл на числото

$p\bar{p}$ се изразява с равенството $p\bar{p} = OP^2$, то е изпълнено $r_n = R_n \left| 1 - OP^2 \right|$ или $r_n = R_n \left| 1 - \left(\frac{OP}{1} \right)^2 \right|$ (тук за удобство в знаменателя записваме радиуса на окръжността k). Ако в общия случай описаната около $A_1 A_2 \dots A_n$ окръжност k има радиус R , то, за да се изравнят размерностите на двете страни в последното равенство, трябва да е изпълнено $r_n = R_n \left| 1 - \left(\frac{OP}{R} \right)^2 \right|$. Така получихме следната

Теорема 11. *Ако многоъгълникът $A_1 A_2 \dots A_n$ ($n \geq 7$) е вписан в окръжност с радиус R , то радиусите R_n и r_n съответно на Симсъновите окръжности-те k_n и $\bar{k}_n$ за точката P удовлетворяват равенството $r_n = R_n \left| 1 - \left(\frac{OP}{R} \right)^2 \right|$.*

8. Заключение. Накрая трябва да отбележим, че подходът на построяване на Симсънови окръжности, който имитира индуктивния подход за получаване на Симсънови прави за вписани окръжности, притежава някои особености. Първо, при увеличаване на n конструкциите стават все по-сложни и е много трудно те да бъдат реализирани по обичайния начин, използвайки линейка и пергел. Освен това такъв подход ще бъде съпроводен с много грешки и откриването на съответните теореми би се затруднило изключително много дори при $n = 6$ и $n = 7$. Затова използването на GSP при откриването на описаните твърдения е от изключително значение. Второ, забелязва се, че доказателствата на теоремите са съпроводени с много изчисления. Тези изчисления обаче са извършени с програмния продукт Maple, което облекчава извършването на някои обичайни алгебрични действия и дава възможност да се получат по-бързо необходимите резултати. Освен това някои междинни изчисления не са необходими за тълкуването на крайните резултати. Трето, при $n = 5$ се получава особеност на теорема 9. Тази особеност се състои във факта, че Симсъновите окръжности k_{41} , k_{42} , k_{43} , k_{44} и k_{45} в общия случай не минават през една точка. Накрая е необходимо да се отбележи, че формулата, участваща в теорема 11, трудно може да се отгатне и да се получи чрез съответните експериментални изчисления с GSP. Затова тук са съществени прецизно извършените пресмятания и тяхното коректно тълкуване.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Тонов, И. (1988). *Приложение на комплексните числа в геометрията*. София: Народна просвета. [Tonov, I. (1988). *Application of complex numbers in Geometry*. Sofia: Narodna prosveta.]
- Тончев, Й. (2013). *Maple. Преобразувания. Изчисления. Визуализация*. София: Техника. [Tonchev, J. (2013). *Maple. Transformations. Computations. Visualization*. Sofia: Tehnika.]
- Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука. [Sharygin, I. (1986). *Geometry problems. Plane geometry*. Moscow: Nauka.]
- Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of Complex Numbers*. Sofia: Arhimed. [Малчески, Р., С. Гроздев & К. Аневска (2015). *Геометрия на комплексните числа*. София: Архимед.]

FANS OF CIRCLES IN INSCRIBED POLYGONS

Abstract. What is applied in the present paper is an inductive construction of Simson line for an arbitrary inscribed polygon. As a result notable circles for the inscribe polygon are obtained, which have interesting properties. The considered constructions are elaborated by means of the program “The Geometer’s Sketchpad” (GSP), while some of the analytical computations – by Maple.



Prof. Sava Grozdev, DSc

University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com



Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.

Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg