УЛИТКА ПАСКАЛЯ

Дарья Коптева, Ксения Горская
Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
„Средняя школа № 8“– Архангельск (Россия)

Аннотация. В статье представлены результаты, полученные в рамках сетевого исследовательского проекта „Энциклопедия замечательных плоских кривых: пишем сами“ участниками из России. Проект был направлен на систематизацию и развития, силами учащихся, знаний о замечательных плоских кривых. Взаимодействие участников проектов осуществлялось с использованием облачных сервисов Google. Исследование проводилось методами аналитической геометрии с использованием программного продукта GeoGebra.

Keywords: circle; curve; equation; GeoGebra; Pascal’s limacon

Авторы статьи уже третий раз принимают участие в международных сетевых исследовательских проектах совместно с учащимися из Болгарии и Казахстана (Shabanova & al., 2016), (Shabanova & al., 2017). Отличительной чертой данного проекта является то, что он реализуется открытым сетевым сообществам и имеет формат краудсорсинг-проекта. Трое ученых из разных вузов России (Г. А. Клековкин, В. Р. Майер и А. В. Ястребов) решили привлечь учащихся к созданию электронной энциклопедии плоских кривых. Для этой цели подготовили введение, оглавление и серии исследовательских задач для некоторых разделов будущей энциклопедии и разместили их на специально созданном (М. Ю. Алфёровым) сайте Googl[1)]. Взаимодействие участников обеспечивал координатор (М. В. Шабанова).

В данной статье рассматриваются результаты, которые были получены в период с сентября 2017 года по апрель 2018 года в ходе решения задач, предложенных профессором В. Р. Майером.

1. Кинематическое определение улитки Паскаля. Решим задачу: *Пусть окружность катится с внешней стороны по другой окружности того же радиуса. Нарисуйте кривую, которую описывает при этом точка, закреплённая: на окружности; на радиусе внутри катящейся окружности; на продолжении радиуса катящейся окружности* (Smirnova & Smirnov, 2004).

Используя компьютерное моделирование, мы получили следующий результат: точка B катящейся окружности описывает кривую, изображённую на рис. 1.

Плоская кривая, которая описывается точкой окружности радиуса r, катящейся по окружности с таким же радиусом, называется *кардиоидой*.

Она получила своё название из-за схожести своих очертаний со стилизованным изображением сердца (от греч. „кардиоида“ — сердце).

Точка A называется *каспом* кардиоиды или точкой возврата[1)], а точка V – *вершиной* кардиоиды[2)], а окружности – производящими.

Продолжив решение данной задачи с помощью компьютерного моделирования, мы получили следующее:

Если точку B' брать не на катящейся окружности, а на радиусе или его продолжении, то получим кривые, изображённые на рисунках 2 и 3. Первую из них называют укороченной, а вторую — удлинённой кардиоидой.

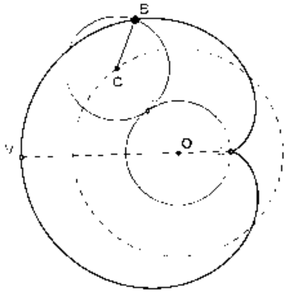


Рисунок 1

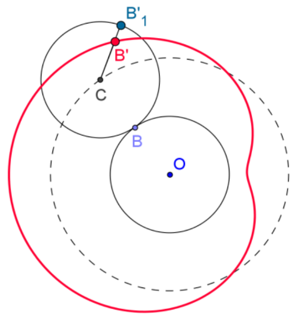


Рисунок 2

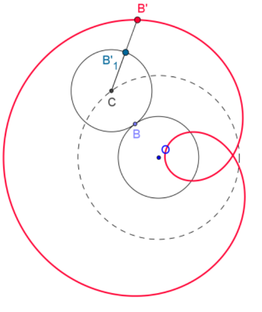


Рисунок 3

Все три вида кривых получили название улиток Паскаля. Такое название им дал французский математик Жюль Роберваль (1602 – 1675) по имени их открывателя Этьена Паскаля – отца Блеза Паскаля (Vilenkin & al., 1996).

Сформулируем определение Улитки Паскаля следующим образом.

Плоская кривая, которая описывается точкой, лежащей на луче с вершиной в центре окружности радиуса r, катящейся без скольжения по неподвижной окружности с таким же радиусом, называется *улиткой Паскаля*.

2. Определение улитки Паскаля как конхоиды окружности. Из начала координат проведён луч, пересекающий данную окружность $x^2 + y^2 = 2ax$ $(a > 0)$ в точке B; на луче по обе стороны от точки B отложены равные между собой отрезки BM и BN постоянной длины l. При вращении луча точки M и N описывают кривую, изображённую на рисунке 4, называемую ***улиткой Паскаля***.

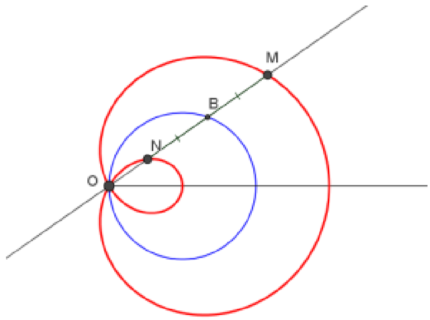


Рисунок 4

Конхоида – плоская кривая, которая получается при увеличении или уменьшении радиус – вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянную величину.

Докажем, что определения 1 и 2 улитки Паскаля эквивалентны. Возьмём рисунок улитки Паскаля из её кинематического определения, на котором окружность с центром B и радиуса r катится без скольжения по окружности с центром A того же радиуса, кривую вычерчивает точка M, находящаяся от B на расстоянии $r+d$. Дополним рисунок окружностью с центром A и радиусом $r+d$ из определения улитки Паскаля через конхоиду (рис.5). Так как подвижная окружность катится без скольжения по неподвижной, то дуги HK и KG равны, отсюда $\angle HAK = \angle KBG$ и четырёхугольник $OABM$ – равнобедренная трапеция, в которой $OA = MB = r+d$ и $\angle MOA = \angle OMB$.

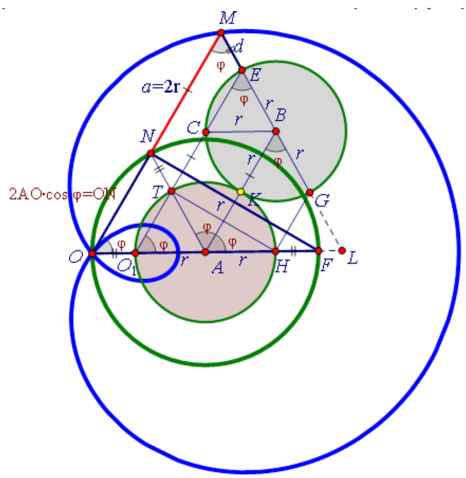


Рисунок 5

Поскольку ΔOAN равнобедренный, то $\angle NOA = \angle ONA$. Тогда прямые NA и MB параллельны и четырёхугольник $ABMN$ – параллелограмм по определению. По свойству параллелограмма, $MN = AB$, $AB = 2r$, тогда $MN = 2r$. Получили: от точки N откладывается отрезок постоянной длины $2r$, который обозначим a. Значит, точка N принадлежит конхоидальной окружности, а улитка Паскаля является конхоидой окружности с центром A радиуса $r + d$ относительно точки O. Несложно показать, что все рассуждения обратимы. Значит, определения 1 и 2 улитки Паскаля эквивалентны.

3. Уравнение улитки Паскаля в полярной системе координат. Множества точек на плоскости можно определить при помощи различных координатных систем, выбор которых определяется различными факторами. Прямоугольную систему координат выбирают, когда в условии задачи даны прямые углы или параллельные прямые. Для удобства проведения вычислений в нашем случае – дана окружность – лучше выбрать полярную систему координат. Выведем уравнение улитки Паскаля в полярной системе координат (рис. 5). Пусть точка O полюс полярной системы координат, а полярная ось совпадает с направлением луча OA. Рассмотрим треугольник ONF. Треугольник ONF прямоугольный, $\angle ONF = 90°$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр), $\frac{ON}{OF} = \cos\varphi$, $ON = OF\cos\varphi$, $OF = 2OA$, OA – радиус конхоидальной окружности, обозначим его R. Тогда $ON = 2R\cos\varphi$, $NM = a$, $OM = ON \pm NM$, $OM = 2R\cos\varphi \pm a$, $\rho = 2R\cos\varphi \pm a$.

Таким образом, уравнение улитки Паскаля имеет вид: $\rho = 2R\cos\varphi \pm a$. Проверить полученное уравнения можно в ИГС GeoGebra, но данная среда не строит кривых, заданных в полярной системе координат.

4. Параметрические уравнения улитки Паскаля. Итак, возник вопрос: как построить кривую, если в среде можно строить графики только в декартовой системе координат? Вопрос решает уравнение улитки Паскаля, заданной параметрически и возможность среды строить траектории движения точки с помощью инструментов След и Локус.

Параметрические уравнения улитки Паскаля следующие:

$$x = \cos\varphi(2r\cos + a),\ y = \sin\varphi(2r\sin + a).$$

Теперь в ИГС GeoGebra можно задать координаты точки M с помощью полученных формул, а саму кривую построить с помощью инструментов След или Локус (рис. 6). Получилась улитка Паскаля.

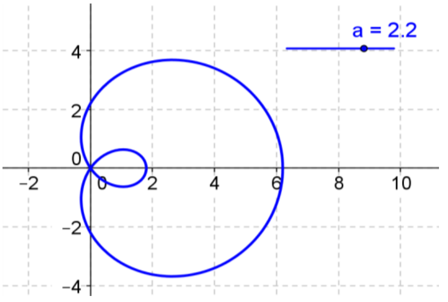


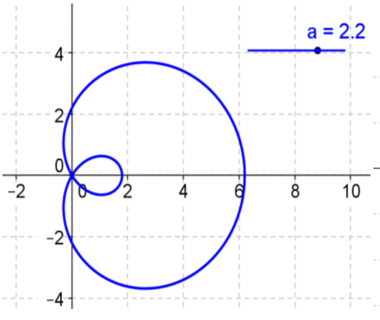
Рисунок 6

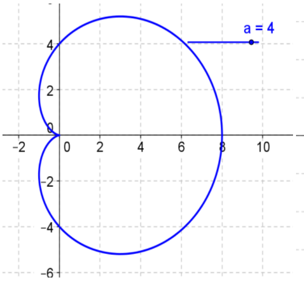
Проведём компьютерный эксперимент: будем менять численные значения параметра a и наблюдать, как при этом меняется форма кривой. В ходе компьютерного исследования, мы получили следующие результаты:

Если $a < 2r$, то полученная кривая является удлинённой кардиоидой (рис. 8);

Если $a = 2r$ — кардиоидой (рис.9);

Если $a > 2r$ — укороченной кардиоидой (рис.10).





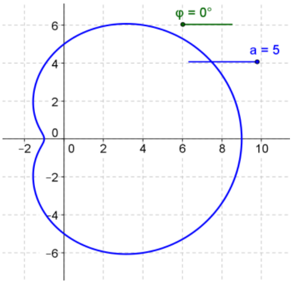


Рисунок 7 **Рисунок 8** **Рисунок 9**

Однако, построенная нами кривая не является графиком уравнения. Вопрос построения графика улитки Паскаля остаётся открытым.

5. Уравнение улитки Паскаля в декартовой системе координат. Выведем уравнение улитки Паскаля в декартовой системе координат. Из ΔOAM (рис. 10) имеем: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Подставим данные равенства в уравнение улитки Паскаля с учётом знаков $\pm$: $\sqrt{x^2 + y^2} = 2r\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \pm a$.

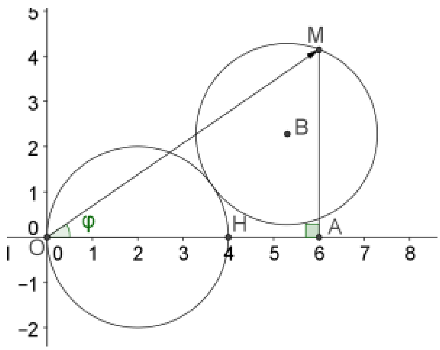


Рисунок 10

Преобразуем уравнение. Сначала избавимся от дроби, а потом от иррациональности:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2rx\pm a\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2=2rx\pm a\sqrt{x^2+y^2},$$

$$x^2+y^2-2rx=\pm a\sqrt{x^2+y^2},\ \left(x^2+y^2-2rx\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right).$$

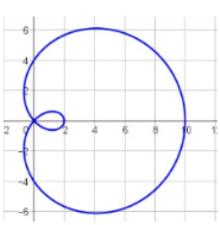
Итак, улитка Паскаля — алгебраическая кривая четвёртого порядка, имеющая в прямоугольной декартовой системе координат уравнение:

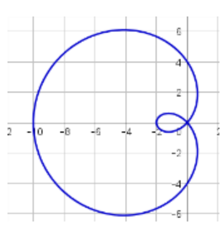
$$\left(x^2+y^2-2rx\right)^2=a^2\left(x^2+y^2\right).$$

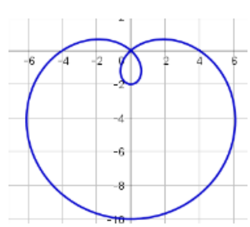
Улитку паскаля в ИГС GeoGebra можно построить, введя её уравнение в строку ввода.

6. Повороты улитки Паскаля. Исходя из определения улитки Паскаля, данная кривая может иметь различные положения на плоскости (до сих пор рассматривались положения, когда касп располагался слева, а полюс – справа). Возникает вопрос: как будут выглядеть уравнения улитки Паскаля при других её расположениях?

Рассмотрим следующее расположения улитки Паскаля:







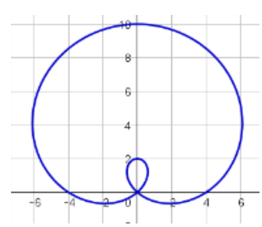


Рисунок 11 **Рисунок 12** **Рисунок 13** **Рисунок 14**

Начнём компьютерный эксперимент с изменения знака. Пусть $\rho = -2r\cos\varphi \pm a$. Тогда параметрические уравнения примут вид:

$$\begin{cases} x = \left(-2r\cos\varphi \pm a\right)\cos\varphi, \\ y = \left(-2r\cos\varphi \pm a\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

Получим улитку Паскаля, изображённую на рис. 12. Вывод: изменение знака симметрично отображает улитку Паскаля относительно вертикальной оси, и уравнение улитки Паскаля имеет вид $\rho = -2r\cos\varphi \pm a$.

Продолжим экспериментировать с уравнением улитки Паскаля. Заменим функцию $\cos\varphi$ на $\pm\sin\varphi$. Тогда $\rho = \pm 2r\sin\varphi \pm a$. Получим следующие параметрические уравнения:

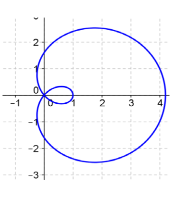
$$\begin{cases} x = \left(\pm 2r\cos\varphi \pm a\right)\cos\varphi, \\ y = \left(\pm 2r\cos\varphi \pm a\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

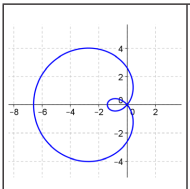
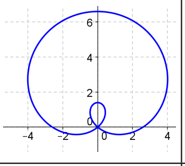
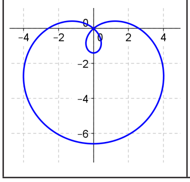
Данным уравнениям соответствует улитка Паскаля, изображённая на рис. 13 и 14. Вывод: если в уравнении улитки Паскаля заменить функцию $\cos\varphi$ на $\pm\sin\varphi$, то улитка Паскаля поворачивается на $90°$ по или против часовой стрелки. Объяснить это можно с помощью формул приведения: $\cos\left(\varphi \pm 90°\right) = \mp\sin\varphi$.

А что получится, если к углу φ прибавить произвольный угол α? Компьютерный эксперимент показывает, что в этом случае улитка Паскаля поворачивается на угол α.

Таким образом, уравнение улитки Паскаля в полярной системе координат может принимать вид: $\rho = \pm 2r\cos\left(\varphi + \alpha\right) \pm a$ или $\rho = \pm 2r\sin\left(\varphi + \alpha\right) \pm a$ в декартовой системе координат: $\left(x^2 + y^2 - 2r.x\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$ или $\left(x^2 + y^2 - 2r.y\right)^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$ (См. Таблицу 1).

Таблица 1. Уравнения улитки Паскаля

График	Полярная система координат	Параметрические уравнения	Декартовая система координат
	$\rho = 2r\cos\varphi \pm a$	$\begin{cases} x = \left(2r\cos\varphi \pm a\right)\cos\varphi, \\ y = \left(2r\cos\varphi \pm a\right)\sin\varphi. \end{cases}$	$\left(x^2 + y^2 - 2r.x\right)^2 =$ $= a^2\left(x^2 + y^2\right)$

	$\rho = -2r\cos\varphi \pm a$	$\begin{cases} x = (-2r\cos\varphi \pm a)\cos\varphi, \\ y = (-2r\cos\varphi \pm a)\sin\varphi. \end{cases}$	$(x^2+y^2+2r.x)^2 = \\ = a^2(x^2+y^2)$
	$\rho = 2r\sin\varphi \pm a$	$\begin{cases} x = (2r\sin\varphi \pm a)\cos\varphi, \\ y = (2r\sin\varphi \pm a)\sin\varphi. \end{cases}$	$(x^2+y^2-2r.y) = \\ = a^2(x^2+y^2)$
	$\rho = -2r\sin\varphi \pm a$	$\begin{cases} x = (-2r\sin\varphi \pm a)\cos\varphi, \\ y = (-2r\sin\varphi \pm a)\sin\varphi. \end{cases}$	$(x^2+y^2+2r.y)^2 = \\ = a^2(x^2+y^2)$

Для дальнейшего эксперимента с уравнениями улитки Паскаля перепишем параметрические уравнения $\begin{cases} x = (2r\cos\varphi + a)\cos\varphi, \\ y = (2r\cos\varphi + a)\sin\varphi \end{cases}$ в следующем виде:

$$\begin{cases} x = 2r\cos^2\varphi + a\cos\varphi, \\ y = 2r\cos\varphi\sin\varphi + a\sin\varphi. \end{cases}$$

Преобразуем данные равенства, используя формулы понижения степени и формулы двойного аргумента, и сдвинем улитку Паскаля на r единиц влево. Получим ещё одно параметрическое уравнение улитки Паскаля:

$$\begin{cases} x = 2r\cos 2\varphi + (a+r)\cos\varphi, \\ y = 2r\sin 2\varphi + a\sin\varphi. \end{cases}$$

Прибавляем углы α и β к углам 2φ и φ: $\begin{cases} x = 2r\cos(2\varphi+\alpha) + (a+r)\cos(\varphi+\beta), \\ y = 2r\sin(2\varphi+\alpha) + a\sin(\varphi+\beta). \end{cases}$ наблюдаем за поворотом улитки Паскаля в ИГС GeoGebra. При изменении угла α от $0°$ до $360°$ улитка Паскаля делает полный поворот по часовой стрелке, а при изменении угла β от $0°$ до $360°$ – против часовой стрелки (рис. 15).

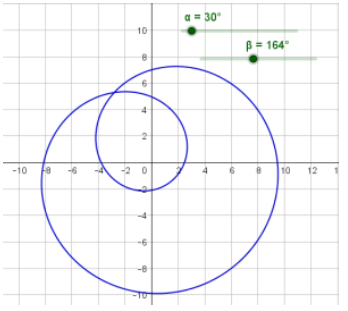


Рисунок 15

7. Улитка Паскаля в комплексных числах. Статья С. В. Ларина „Геометрическое моделирование действий с комплексными числами средствами GeoGebra“ (Shabanova & al., 2013), подсказала идею ещё одного способа моделирования улитки Паскаля – построим в среде многочлен второй степени от комплексного переменного, модуль которого равен 1:

$$\begin{cases} w(z) = az^2 + bz + c, \\ |z| = 1. \end{cases}$$

Эксперимент, проведённый в среде GeoGebra, показывает, что многочлен $w(z)$ описывает кривую, похожую на улитку Паскаля (рис.17).

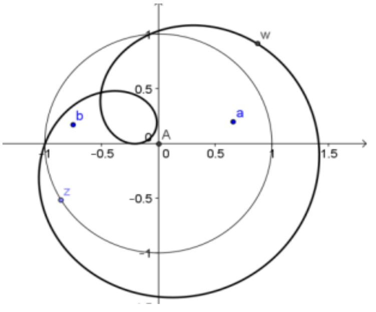


Рисунок 16

Попробуем доказать, что это действительно улитка Паскаля. Пусть $z = x + iy$, тогда $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Перейдем к полярной системе координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Так как $|z| = 1$, имеем $r = 1$, $x^2 - y^2 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$, $2xy = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$. Выполним преобразования:

$$w(z) = a\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + b\left(x + iy\right) + b\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) =$$
$$= \left(a\cos 2\varphi + b\sin\varphi\right) + i\left(a\sin 2\varphi + b\sin\varphi\right).$$

Получили уравнение, похожее на параметрическое уравнение улитки Паскаля: $x = a\cos 2\varphi + b\sin\varphi$, $y = a\sin 2\varphi + b\sin\varphi$, правда, с комплексными коэффициентами a и b. Дальнейшие преобразования в общем виде являются сложными, так как требуется введение вспомогательного аргумента угла. Если же данную задачу решить для конкретного многочлена, то гипотеза подтверждается, представим вывод.

Рассмотрим многочлен $w(z) = z^2 + k(1+i)z$, $|z| = 1$. Тогда

$$w(z) = \left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) + i\left(kx + ky + 2xy\right) =$$

$$= \left[k\left(\cos\varphi - \sin\varphi\right) + \cos 2\varphi\right] + i\left[k\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) + \sin 2\varphi\right] =$$

$$= \left[k\sqrt{2}\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos 2\varphi\right] + i\left[k\sqrt{2}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2\varphi\right].$$

Отсюда $\begin{cases} x = \cos 2\varphi + \sqrt{2}k\cos\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ y = \sin 2\varphi + \sqrt{2}\sin\left(\varphi + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

Замена $\varphi - \dfrac{\pi}{4} = \alpha$ приводит к уравнениям улитки Паскаля:

$$\begin{cases} x = -\sin 2\alpha - \sqrt{2}k\sin\alpha, \\ y = \cos 2\alpha + \sqrt{2}k\cos\alpha. \end{cases}$$

Дальнейшие исследования в ИГС GeoGebra показали: если дан многочлен второй степени от комплексного переменного, модуль которого равен 1, вида $w(z) = az^2$, где a – фиксированное комплексное число, z – комплексная переменная, то многочлен $w(z)$ – описывает центральную окружность (рис. 17).

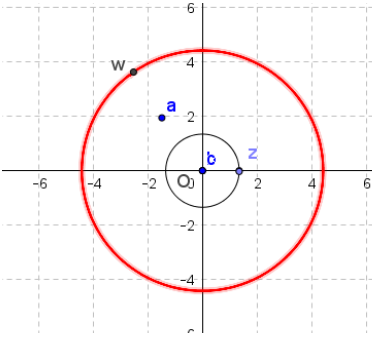


Рисунок 17

Тогда возникает новая задача: Написать уравнение улитки Паскаля в комплексных числах.

8. Свойства и признаки улитки Паскаля

Задача 1. *Что представляет собой множество оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки на всевозможные касательные к окружности?*

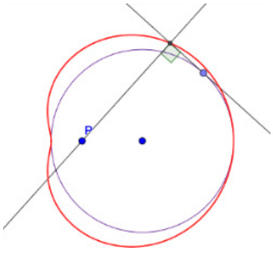


Рисунок 18

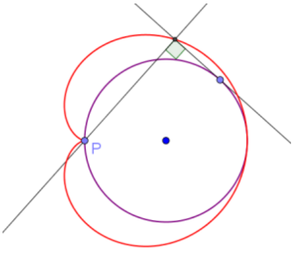


Рисунок 19

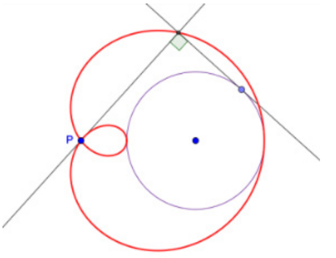


Рисунок 20

Решение данной задачи в ИГС, показывает, что получается улитка Паскаля, если точка лежит вне окружности и кардиоида, если точка лежит на окружности.

Докажем этот факт геометрически. Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке A, a – касательная к окружности в т. C (рис. 21).

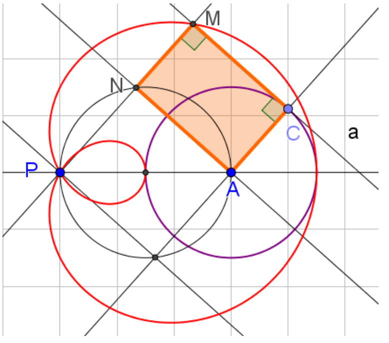


Рисунок 21

Построим $b \perp a$ и $\angle PMC = 90°$. Докажем, что множество всех точек, построенных таким образом, являются улиткой Паскаля. Точка C – точка касания, тогда $\angle MCA = 90°$ (Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания). $MP \perp a$ и $CA \perp a$ тогда $MP \parallel CA$. Значит, $NMCA$ – прямоугольник. Точка M – основание перпендикуляра, опущенного из полюса P на касательную в точке C – к окружности. Геометрическое место таких точек – улитка Паскаля. Следовательно, улитка Паскаля и будет **поздрой** окружности относительно полюса P.

Поэдера окружности относительно точки P – множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки P на касательные к окружности.

Задача 2. *Что представляет собой множество всех точек, симметричных определённой точке относительно всевозможных касательных к этой окружности?*

Решение данной задачи в ИГС, показывает, что получается улитка Паскаля, если точка лежит вне окружности (рис. 22, 23) и кардиоида (рис.24), если точка лежит на окружности.

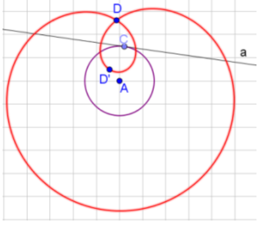


Рисунок 22

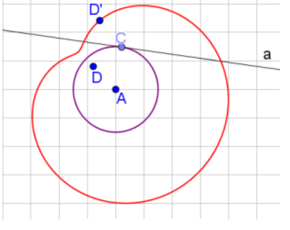


Рисунок 23

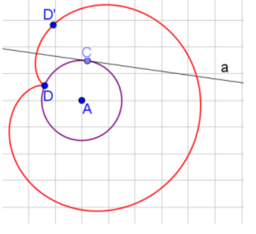


Рисунок 24

Пусть дана окружность с центром в точке A, D – определённая точка, a – касательная к окружности, D' – точка, симметричная точке D относительно прямой a. Построим окружность, симметричную данной относительно касательной, проходящей через точку C. Тогда построенную окружность можно рассматривать как окружность, катящуюся по данной (рис. 25).

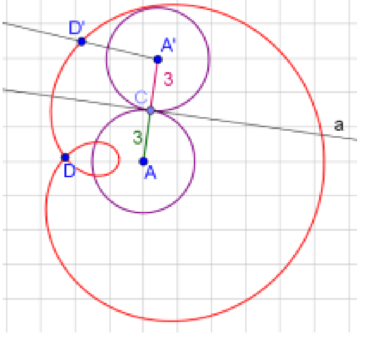


Рисунок 25

Кроме того окружности имеют одинаковые радиусы, точка D', лежит на луче с вершиной в центре окружности радиуса r, катящейся по неподвижной окружности с таким же радиусом. Тогда кривая, которую описывает точка D', называется *улиткой Паскаля* (кинематическое определение улитки Паскаля).

NOTES/ЗАМЕТКИ

1. Сайт для организации сетевых исследовательских проектов по математике „Пишем сами" (URL: https://sites.google.com/site/pisemsami/home). [Website for organization of net research projects in Mathematics "We write alone" (URL: https://sites.google.com/site/pisemsami/home)]
2. Акопян, А. Геометрия кардиоиды. Сайт МЦНМО. Режим доступа: http://www.mccme.ru/~akopyan/papers/cardioid.pdf. [Agopjan, A. Geometry of the cardioid. Website of MCCME. Regime of access: http://www.mccme.ru/~akopyan/papers/cardioid.pdf]
3. Скляревский, Е. С. Улитка на паутине в стиле Поп-Арт. Блог „Арбуз". Режим доступа: http://arbuz.uz/x_ulitka.html. [Skljarevkii, E.S. Limacon on silk in Pop-Art' style. Blog "Arbuz". Regime of access: http://arbuz.uz/x_ulitka.html.]
4. Математическая энциклопедия. Т. 5. Москва: „Советская Энциклопедия", 1984. [Mathematical Encyclopedia. T. 5. Moscow: "Soviet Encyclopedia", 1984.]

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Alexandrova, N. (2008). *Istoria matematicheskih terminov, ponyatii, oboznachenii. Slovar-spravochnik*. Moscow: LKI (in Russian). [Александрова, Н. (2008). *История математических терминов, понятий, обозначений*. *Словарь-справочник*. Москва: ЛКИ.]

Alexandrova, N. (1984). *Matematicheski termini*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian). [Александрова, Н. (1984). *Математически термини*. София: Наука и изкуство.]

Vasilev, N. B. & V. L. Gutenmaher (2000). *Pryamye i krivye*. Moscow: MTsNMO (in Russian). [Васильев, Н. Б. & В. Л. Гутенмахер (2000). *Прямые и кривые*. Москва: МЦНМО.]

Vilenkin, N. Y. et al (1996). *Za stranitsami uchebnika matematiki: Arifmetika. Algebra. Geometria: Kn. Dlya uchashtihsya 10 – 11 kl. Obshteobrazovat. Uchrejdenii*. Moscow: Prosveshtenie (in Russian). [Виленкин Н. Я. & др. *За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Кн. для учащихся 10 – 11 кл. общеобразоват. учреждений*. Москва: Просвещение: АО „Учеб. Лит.".]

Vygotskii, M. Y. (1972). *Spravochnik po vyshei matematike*. Moscow: FIZMATLIT (in Russian). [Выгодский, М. Я. (1972). *Справочник по высшей математике*. Москва: ФИЗМАТЛИТ.]

Gindikin, S. G. (2006). *Rasskazy o fizikah i matematikah*. Moskow: MTsNMO (in Russian). [Гиндикин, С. Г. (2006). *Рассказы о физиках и математиках*. Москва: МЦНМО.]

Markushevich, A. (1978). *Notable curves*. Moscow: Nauka (in Russian). [Маркушевич, А. (1978). *Замечательные кривы*. Москва: Наука.]

Shabanova, M. V. et al (2013). *Obuchenie matematiki s ispolzovaniem vozmojnostey GeoGebra*. Moscow: Pero (in Rusian). [Шабанова, М. В. & др. (2013). *Обучение математике с использованием возможностей GeoGebra: коллективная монография*. Москва: Перо.]

Smirnova, I. M. & V. A. Smirnov (2004). *Geometria. Nestandartye i issledovatelskie zadachi: Uchebnoe posobie dlya 7 – 11 kl. Obshteobrazovat. Uchrejdenii*. Moscow: Mnemozina (in Russian). [Смирнова, И. М. & В. А. Смирнов (2004). *Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи: Учебное пособие для 7 – 11 кл. общеобразоват. учреждений*. Москва: Мнемозина.]

Smirnova, I. M. & V. A. Smirnov (2003). *Geometria: Uchebnik dlya 10-11 kl. Estestv. –nauch. Profilya obuchenia*. Moscow: Prosveshtenie (in Russian). [Смирнова, И. М. & В. А. Смирнов (2003). Геометрия: Учебник для 10 – 11 кл. естеств.-науч. профиля обучения. Москва: Просвещение.]

Sobolev, A. B., M. A. Vigura et al. (2005). *Analiticheskaya geometria na ploskosti. Poverhnosti vtorovo poryadka: Uchebnoe posobie*. Ekaterinburg: GOU VPO UGTU-UPI (in Russian). [Соболев, А. Б., М. А. Вигура & др. (2005). *Аналитическая геометрия на плоскости. Поверхности второго порядка: Учебное пособие*. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ.]

Gellert, W., H. Kastner & S. Nueber (1983). *Matematicheski enciklopedichen rechnik*. Sofia: Nauka i izkustvo (in Bulgarian). [Геллерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space*. Sofia: Archimedes (in Bulgarian). [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of the triangle*. Sofia: Archimedes 2000 (in Bulgarian). [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000.]

Markushevich, A. (1952). *Notable curves*. Moscow: Gos. iz-vo teoretiko-tehnicheskoy literatury (in Russian). [Маркушевич, A. (1952). *Замечательные кривы*. Москва: Гос. изд-во теоретико-технической литературы.]

Savelov, A. (1960). *Ploskie krivy*. Moscow: Gos. iz-vo fiziko-matematicheskoy literatury (in Russian). [Савелов, A. *Плоские кривые*. (1960). Москва: Гос. изд-во физико-математической литературы.]

Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry*. Moscow: ASOU (in Russian). [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). Gaining new knowledge by computer experiments. *Journal of Educational Sciences & Psychology, vol. VII (LXIX), No 1B*. Special Issue – International Conference Education and Psychology Challenges – Teachers for the knowledge society – 4th edition, May, 122 – 125, ISSN 2247-6377. (ISSN online version 2247-8558).

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics*: The *Bulgaria Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1).

Shabanova, M., R. Atamuratova. M. Belorykova, V. Nenkov & M. Pavlova (2016). The game “Geometry scrabble in cloud” an organizational form of the international student research groups. *Mathematics and education in mathematics, 45*, 223 – 228. (ISSN 1313-3330).

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2016). The First international set research project of secondary students in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 6*, 567 – 571 (in Russian).] (ISSN 1310-2230). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков (2016). Первый международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 6*, 567 – 571.]

Shabanova, M., M. Belorykova, R. Atamuratova & V. Nenkov (2017). Second international set research student ptoject in the frames of MITE, *Mathematics and Informatics, 5*, 457 – 465. (in Russian).] (ISSN 1310-2230). [Шабанова, М., М. Белорукова, Р. Атамуратова & В. Ненков (2017). Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках MITE, *Математика и информатика, 5*, 457 – 465.]

PASCAL'S LIMACON

Abstract. The paper presents results of the Russian participants in the net research project "Encyclopedia of notable plane figures: we work by ourselves". The project aimed at systematization and development of knowledge on notable plane curves by secondary students. The net interaction between the participants was realizes using Google Cloud Service. The investigation was carried out by analytical geometry methods applying the software product GeoGebra.

✉ **Ms. Kopteva Daria, student**
Public Secondary School №8
34 – 1 – 82, Avenue Novgorodski
163061 Arkhangelsk, Russia
E-mail: kopteva-8@yandex.ru

✉ **Ms. Gorskaya Kseniya, student**
Public Secondary School №8
22 – 201, Avenue Shabalina
163060 Arkhangelsk, Russia
E-mail: gorksuvas@mail.ru