

ТРИ СВОЙСТВА НА ТРИЪГЪЛНИКА, ОПРЕДЕЛЕНИ ОТ ВИСОЧИНИТЕ МУ

Сава Гроздев, Веселин Ненков

Резюме. С помощта на компютърната програма „THE GEOMETER’S SKETCHPAD“ е изследвана една задача от Международната олимпиада по математика през 2012 г. Открити и доказани са няколко интересни свойства на триъгълника във връзка с височините му.

Keywords: problem solving, triangle, altitude, THE GEOMETER’S SKETCHPAD

Обичайното изследване върху дадена математическа задача е свързано с търсене на нейно обобщение. Не винаги обаче подобно търсене се оказва успешно. Въпреки това направените изследвания могат да доведат до резултати, които извеждат скрити свойства на разглежданите обекти. Пример в това отношение е забелязването на три интересни свойства на триъгълника, свързани с височините му. Тези свойства откриваме с помощта на програмата „THE GEOMETER’S SKETCHPAD“ (GSP) при изследването на следната задача от Международната олимпиада по математика през 2012 г.:

Задача. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$), за който $C_1 \in AB$ е петата на височината през върха C . Нека P е точка от вътрешността на отсечката CC_1 . Точката K от отсечката AP е такава, че $BK = BC$, а точката L от отсечката BP е такава, че $AL = AC$. Ако M е пресечната точка на AL и BK , да се докаже, че $MK = ML$. [1]

Ще разширим геометричната конфигурация, описана в тази задача, при произволен триъгълник ABC . Нека $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$ и $C_1 \in AB$ са петите на височините на $\triangle ABC$ съответно през върховете A , B и C , а P е произволна точка от правата CC_1 . Ако k_a е окръжността с център A и радиус AB_1 , а k_b – окръжността с център B и радиус BA_1 , то с K_1 и K_2 означаваме пресечните точки на k_b с правата AP (ако съществуват), а с L_1 и L_2 – пресечните точки на k_a с правата BP (ако съществуват). Определяме още точките $M_{11} = BK_1 \cap AL_1$, $M_{12} = BK_1 \cap AL_2$, $M_{21} = BK_2 \cap AL_1$ и $M_{22} = BK_2 \cap AL_2$.

За построените по описания начин точки M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} очакваме да притежават някои свойства в зависимост от положението на P върху CC_1 . Нека

H е ортоцентърът на ABC , а H' е точката, симетрична на H спрямо AB . Забелязаните с помощта на GSP свойства относно разположението на точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} формулираме в следната:

Теорема 1. Ако точката P описва отсечката HH' , то две от точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} описват елипса E , която минава през върха C и има за фокуси върховете A и B , а другите две описват хипербола χ , която минава през върха C и има за фокуси върховете A и B или симетралата s на AB .

В олимпиадната задача точката M удовлетворява едно равенство. При разширените разглеждания за правоъгълен триъгълник ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) се вижда, че точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} са свързани с повече равенства. По-точно изпълнени са равенствата $K_1M_{11} = L_1M_{11}$, $K_2M_{22} = L_2M_{22}$, $K_1M_{12} = L_2M_{12}$ и $K_2M_{21} = L_1M_{21}$. Не може да се очаква, че в общия случай тези равенства ще се запазят, но можем да очакваме, че съществува равенство, свързващо отношенията на отсечките, участващи в горните равенства. Наистина, наблюденията с GSP показват равенството, описано в следващата:

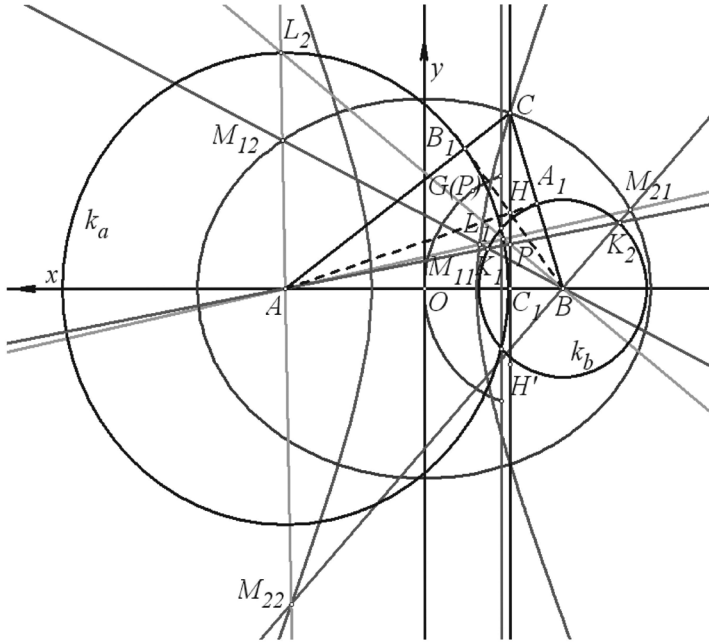
Теорема 2. Точките K_i , L_i и M_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2$) са свързани с равенството:

$$\frac{K_1M_{11}}{L_1M_{11}} \cdot \frac{K_2M_{22}}{L_2M_{22}} = \frac{K_1M_{12}}{L_2M_{12}} \cdot \frac{K_2M_{21}}{L_1M_{21}}.$$

Точките K_1 , K_2 , L_1 и L_2 , в зависимост от пораждащата ги точка P , притежават център на тежестта $G(P)$. По отношение на точката $G(P)$ наблюденията с GSP водят до формулирането на следната:

Теорема 3. Ако точката P описва отсечката HH' , точката $G(P)$ описва дъга от окръжност или отсечка, краищата на която лежат върху радикалната ос на окръжностите k_a и k_b .

Преминаваме към доказване на формулираните твърдения. Разглеждаме Декартова координатна система Oxy с център средата O на AB , абсцисна ос $Ox \equiv AB$, насочена към точката A и ординатна ос Oy , насочена така, че ординатата на C е положителна [2]. Спрямо Oxy координатите на точките A , B , C и P определяме по следния начин: $A(\alpha, 0)$, $B(-\alpha, 0)$, $C(\gamma_1, \gamma_2)$ и $P(\gamma_1, p)$. Дължините на BC , CA , AB и лицето на $\triangle ABC$ означаваме съответно с a , b , c и S . Лесно се забелязва, че са изпълнени равенствата $\alpha = \frac{c}{2}$, $\gamma_1 = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ и $\gamma_2 = \frac{2S}{c}$.



Спрямо Ox елипсата E и хиперболата χ (ако съществува) имат следните канонични уравнения:

$$(1) \quad E: \frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = 1,$$

$$(2) \quad \chi: \frac{x^2}{a_x^2} - \frac{y^2}{b_x^2} = 1.$$

Тъй като E и χ имат за фокуси точките A и B , то за техните линейни ексцентрицитети са изпълнени съответно равенствата $c_e^2 = a_e^2 - b_e^2 = c^2$ и $c_x^2 = a_x^2 + b_x^2 = \alpha^2$.

От тези равенства и равенствата $\frac{\gamma_1^2}{a_e^2} + \frac{\gamma_2^2}{b_e^2} = 1$ и $\frac{\gamma_1^2}{a_x^2} - \frac{\gamma_2^2}{b_x^2} = 1$ намираме

$$(3) \quad a_e^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2, \quad b_e^2 = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4}, \quad a_x^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2, \quad b_x^2 = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4}.$$

От равенствата (3) непосредствено се вижда, че елипсата E винаги съществува, а хиперболата χ съществува само за неравнобедрен триъгълник. Изпълнено е и равенството $S = b_e \cdot b_x$.

Преминуваме към определяне на координатите на точките K_i , L_i и M_{ij} ($i=1,2; j=1,2$). В началото определяме уравненията на правите BC , CA , AB , AA_1 , BB_1 , CC_1 , AP и BP във вида $BC: \gamma_2 x - (\gamma_1 + \alpha)y + \gamma_2 \alpha = 0$, $CA: \gamma_2 x - (\gamma_1 - \alpha)y - \gamma_2 \alpha = 0$, $AB: y = 0$, $AA_1: (\gamma_1 + \alpha)x + \gamma_2 y - \alpha(\gamma_1 + \alpha) = 0$, $BB_1: (\gamma_1 - \alpha)x + \gamma_2 y + \alpha(\gamma_1 - \alpha) = 0$, $CC_1: x - \gamma_1 = 0$, $AP: px - (\gamma_1 - \alpha)y - p\alpha = 0$ и $BP: px - (\gamma_1 + \alpha)y + p\alpha = 0$.

От първите шест уравнения намираме $A_1 \left(\frac{\alpha[(\gamma_1 + \alpha)^2 - \gamma_2^2]}{(\gamma_1 + \alpha)^2 + \gamma_2^2}, \frac{2\alpha\gamma_2(\gamma_1 + \alpha)}{(\gamma_1 + \alpha)^2 + \gamma_2^2} \right)$, $B_1 \left(-\frac{\alpha[(\gamma_1 - \alpha)^2 - \gamma_2^2]}{(\gamma_1 - \alpha)^2 + \gamma_2^2}, -\frac{2\alpha\gamma_2(\gamma_1 - \alpha)}{(\gamma_1 - \alpha)^2 + \gamma_2^2} \right)$ и $H \left(\gamma_1, -\frac{\gamma_1^2 - \alpha^2}{\gamma_2} \right)$. Оттук следва още, че $|AB_1|^2 = \frac{4\alpha^2(\gamma_1 - \alpha)^2}{(\gamma_1 - \alpha)^2 + \gamma_2^2}$, $|BA_1|^2 = \frac{4\alpha^2(\gamma_1 + \alpha)^2}{(\gamma_1 + \alpha)^2 + \gamma_2^2}$ и $H' \left(\gamma_1, \frac{\gamma_1^2 - \alpha^2}{\gamma_2} \right)$. От последните равенства получаваме уравненията на окръжностите k_a и k_b по следния начин:

$$k_a: (x - \alpha)^2 + y^2 = \frac{4\alpha^2(\gamma_1 - \alpha)^2}{(\gamma_1 - \alpha)^2 + \gamma_2^2}, \quad k_b: (x + \alpha)^2 + y^2 = \frac{4\alpha^2(\gamma_1 + \alpha)^2}{(\gamma_1 + \alpha)^2 + \gamma_2^2}.$$

След изваждане на уравненията на k_a и k_b , като използваме равенствата $(\gamma_1 + \alpha)^2 + \gamma_2^2 = a^2$ и $(\gamma_1 - \alpha)^2 + \gamma_2^2 = b^2$, получаваме уравнението на радикалната ос t във вида

$$(4) \quad t: x = \frac{4\alpha^2\gamma_1\gamma_2^2}{a^2b^2}.$$

Сега за удобство да въведем означенията $\bar{h} = \gamma_1^2 - \alpha^2$, $p_a = (\gamma_1 - \alpha)^2 + p^2$, $p'_a = (\gamma_1 - \alpha)^2 - p^2$, $p_b = (\gamma_1 + \alpha)^2 + p^2$, $p'_b = (\gamma_1 + \alpha)^2 - p^2$, $\xi = \sqrt{\bar{h}^2 - p^2\gamma_2^2}$. Величината ξ има смисъл само за онези точки P , за които $p \in \left[-\frac{\bar{h}}{\gamma_2}, \frac{\bar{h}}{\gamma_2} \right]$ или $p \in \left[\frac{\bar{h}}{\gamma_2}, -\frac{\bar{h}}{\gamma_2} \right]$. Това означава, че ξ има смисъл само когато P е точка от отсечката HH' .

За да определим координатите на двойките точки K_1 , K_2 и L_1 , L_2 , решаваме системите, образувани съответно от двойките уравнения на AP , k_b и BP , k_a . След несложни пресмятания получаваме:

$$(5) \quad \begin{aligned} & K_1 \left(-\frac{\alpha}{ap_a} [ap'_a + 2(\gamma_1 - \alpha)\xi], -\frac{2\alpha p}{ap_a} [a(\gamma_1 - a) + \xi] \right), \\ & K_2 \left(-\frac{\alpha}{ap_a} [ap'_a - 2(\gamma_1 - \alpha)\xi], -\frac{2\alpha p}{ap_a} [a(\gamma_1 - a) - \xi] \right), \end{aligned}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} & L_1 \left(\frac{\alpha}{bp_b} [bp'_b + 2(\gamma_1 + \alpha)\xi], \frac{2\alpha p}{bp_b} [b(\gamma_1 + \alpha) + \xi] \right), \\ & L_2 \left(\frac{\alpha}{bp_b} [bp'_b - 2(\gamma_1 + \alpha)\xi], \frac{2\alpha p}{bp_b} [b(\gamma_1 + \alpha) - \xi] \right). \end{aligned}$$

Нека $K(x', y')$ е общо означение за точките $K_1(x_{K_1}, y_{K_1})$ и $K_2(x_{K_2}, y_{K_2})$, $L(x'', y'')$ е общо означение за точките $L_1(x_{L_1}, y_{L_1})$ и $L_2(x_{L_2}, y_{L_2})$ и M е общо означение за точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} . Тогава уравненията на правите BK и AL са следните: $BK: y'x - (x' + \alpha)y + \alpha y' = 0$ и $AL: y''x - (x'' - \alpha)y - \alpha y'' = 0$. Тъй като K лежи върху AP , а L – върху BP , то от уравненията на тези прави следват равенствата $y' = \frac{p(x' - \alpha)}{\gamma_1 - \alpha}$ и $y'' = \frac{p(x'' + \alpha)}{\gamma_1 + \alpha}$. От последните четири равенства намираме координатите на M :

$$(7) \quad \left(-\frac{\gamma x'x'' - \alpha^2(x' + x'') + \alpha^2}{x'x'' - \gamma_1(x' + x'') + \alpha^2} - \frac{p(x' - \alpha)(x'' + \alpha)}{x'x'' - \gamma_1(x' + x'') + \alpha^2} \right).$$

Сега в (7) заместваме двойката (x', x'') последователно с двойките (x_{K_1}, x_{L_1}) , (x_{K_2}, x_{L_2}) , (x_{K_1}, x_{L_2}) и (x_{K_2}, x_{L_1}) от (6) и (7) и окончателно получаваме

$$(8) \quad \begin{aligned} & M_{11} \left(\frac{\alpha [2\gamma_1(2abp^2 - \xi^2) + (a+b)(p^2 - \bar{h})\xi]}{2\alpha(abp^2 + \xi^2) + (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi}, \frac{-2\alpha p [c(\bar{h}ab + \xi^2) + 2(a-b)b_e^2\xi]}{c[2\alpha(abp^2 + \xi^2) + (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi]} \right), \\ & M_{22} \left(\frac{\alpha [2\gamma_1(2abp^2 - \xi^2) - (a+b)(p^2 - \bar{h})\xi]}{2\alpha(abp^2 + \xi^2) - (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi}, \frac{-2\alpha p [c(\bar{h}ab + \xi^2) - 2(a-b)b_e^2\xi]}{c[2\alpha(abp^2 + \xi^2) - (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi]} \right), \\ & M_{12} \left(\frac{\alpha [2\gamma_1(2abp^2 + \xi^2) - (a-b)(p^2 - \bar{h})\xi]}{2\alpha(abp^2 - \xi^2) - (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi}, \frac{-2\alpha p [c(\bar{h}ab - \xi^2) - 2(a+b)b_x^2\xi]}{c[2\alpha(abp^2 - \xi^2) - (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi]} \right), \\ & M_{21} \left(\frac{\alpha [2\gamma_1(2abp^2 + \xi^2) + (a-b)(p^2 - \bar{h})\xi]}{2\alpha(abp^2 - \xi^2) + (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi}, \frac{-2\alpha p [c(\bar{h}ab - \xi^2) + 2(a+b)b_x^2\xi]}{c[2\alpha(abp^2 - \xi^2) + (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi]} \right). \end{aligned}$$

Като използваме равенствата $abp^2 + \xi^2 = \bar{h}(p^2 + \bar{h}) + 2p^2b_x^2$, $abp^2 - \xi^2 = -\bar{h}(p^2 + \bar{h}) + 2p^2b_e^2$, $c^2(\bar{h}ab + \xi^2) = b_e^2\left\{\bar{h}\left[(a-b)^2 + c^2\right] - 4p^2b_x^2\right\}$ и $c^2(\bar{h}ab - \xi^2) = b_x^2\left\{\bar{h}\left[(a+b)^2 + c^2\right] + 4p^2b_e^2\right\}$, след заместване на координатите на M_{11} и M_{22} в (1), а координатите на M_{12} и M_{21} в (2), установяваме, че M_{11} и M_{22} лежат на E , а M_{12} и M_{21} – на χ . Освен това лесно се вижда, че когато $a=b$, т.е. когато $\triangle ABC$ е равнобедрен, първите координати на M_{12} и M_{21} са равни на нула, което означава, че тези точки лежат върху правата $s \equiv Oy$. С това теорема 1 е доказана.

За да докажем теорема 2, записваме желаното равенство в следния вид

$$(9) \quad \frac{K_1 M_{11}}{K_1 M_{12}} \cdot \frac{K_2 M_{22}}{K_2 M_{21}} = \frac{L_1 M_{11}}{L_1 M_{21}} \cdot \frac{L_2 M_{22}}{L_2 M_{12}}.$$

Всяко от горните отношения е образувано от тройка колинеарни точки. Затова тези отношения са равни на отношенията на разликите от съответните ординати. След като използваме представянето на ординатите във вида (7), получаваме простите отношения

$$\begin{aligned} \frac{\overline{K_1 M_{11}}}{\overline{K_1 M_{12}}} &= -\frac{\left[2\alpha(abp^2 - \xi^2) - (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi - b(p^2 + \bar{h})\right]}{\left[2\alpha(abp^2 + \xi^2) + (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi + b(p^2 + \bar{h})\right]}, \\ \frac{\overline{K_2 M_{22}}}{\overline{K_2 M_{21}}} &= -\frac{\left[2\alpha(abp^2 - \xi^2) + (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi + b(p^2 + \bar{h})\right]}{\left[2\alpha(abp^2 + \xi^2) - (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi - b(p^2 + \bar{h})\right]}, \\ \frac{\overline{L_2 M_{11}}}{\overline{L_2 M_{21}}} &= -\frac{\left[2\alpha(abp^2 - \xi^2) + (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi + a(p^2 + \bar{h})\right]}{\left[2\alpha(abp^2 + \xi^2) + (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi - a(p^2 + \bar{h})\right]}, \\ \frac{\overline{L_2 M_{22}}}{\overline{L_2 M_{12}}} &= -\frac{\left[2\alpha(abp^2 - \xi^2) - (a+b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi - a(p^2 + \bar{h})\right]}{\left[2\alpha(abp^2 + \xi^2) - (a-b)(p^2 + \bar{h})\xi\right]\left[2\alpha\xi + a(p^2 + \bar{h})\right]}. \end{aligned}$$

Оттук следва равенството $\frac{\overline{K_1 M_{11}}}{\overline{K_1 M_{12}}} \cdot \frac{\overline{K_2 M_{22}}}{\overline{K_2 M_{21}}} = \frac{\overline{L_1 M_{11}}}{\overline{L_1 M_{21}}} \cdot \frac{\overline{L_2 M_{22}}}{\overline{L_2 M_{12}}}$, което води до (9).

С това теорема 2 е доказана.

За да докажем теорема 3, от (5) и (6) намираме координатите на центъра на тежестта $G(P)$ $\left(\frac{4p^2\alpha^2\gamma_1}{P_a P_b}, \frac{2\alpha p^2(p^2 - \bar{h})}{P_a P_b}\right)$. Оттук за H и H' съответ-

но при $p = -\frac{\bar{h}}{\gamma_2}$ и $p = \frac{\bar{h}}{\gamma_2}$ получаваме $G(H) \left(\frac{4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2^2}{a^2 b^2}, -\frac{2\alpha^2 (\bar{h} - \gamma_2^2) \gamma_2}{a^2 b^2} \right)$ и $G(H') \left(\frac{4\alpha^2 \gamma_1 \gamma_2^2}{a^2 b^2}, \frac{2\alpha^2 (\bar{h} - \gamma_2^2) \gamma_2}{a^2 b^2} \right)$. Тези точки са симетрични спрямо правата AB

и удовлетворяват уравнението (4) на радикалната ос t на k_a и k_b . Освен това, лесно се проверява, че за всяка точка P от отсечката HH' точката $G(P)$ лежи върху окръжност Γ с център $\Omega \left(\frac{\alpha^2}{2\gamma_1}, 0 \right)$ и радиус $R_0 = \frac{\alpha^2}{2|\gamma_1|} = \frac{c^3}{4|a^2 - b^2|}$. Така получаваме, че когато P описва отсечката HH' , точката $G(P)$ описва дъга от Γ с краища точките $G(H)$ и $G(H')$, като минава през точката O , т.е. $G(P)$ описва дъгата $\overline{G(H)OG(H')}$ от Γ . Ако $a = b$, точката $G(P)$ описва отсечката $G(H)G(H')$, минаваща през O . С това теорема 3 е доказана.

Трябва да отбележим, че точката $G(P)$ описва цялата окръжност Γ или дъга, съдържаща Γ , когато точката $P_0 \left(\gamma_1, \sqrt{\bar{h}} \right)$ лежи върху отсечката HH' . Точката P_0 съществува, когато $\bar{h} > 0$, а това е изпълнено, когато един от ъглите $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BAC$ е тъп. Точката P_0 е върху отсечката HH' , когато е изпълнено неравенството $(a^2 - b^2)^2 - c^4 > 16S^2$.

Накрая ще отбележим, че с теорема 1 показвахме как точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} описват две забележителни криви от втора степен за $\triangle ABC$, в теорема 2 една метрична зависимост, свързваща точките M_{11} , M_{12} , M_{21} и M_{22} с точките K_1 , K_2 , L_1 и L_2 , а в теорема 3 получихме геометрично място, зависещо само от точките K_1 , K_2 , L_1 и L_2 .

ЛИТЕРАТУРА

- Гроздев, С. (2012) Анализ на две задачи от международната олимпиада по математика, Математика и информатика, 45(4), 304-307.
Моденов, П. Аналитическая геометрия. Московского университета, Москва, 1969.

THREE PROPERTIES OF THE TRIANGLE GENERATED BY ITS ALTITUDES

Abstract. A problem from the International Mathematical Olympiad in 2012 is investigated by means of the computer software „THE GEOMETER’S SKETCHPAD“. Some interesting properties of the triangle in connection with its altitudes are discovered and proved.

Sava Grozdev

✉ Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

Veselin Nenkov

✉ Doctor in Pedagogy
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech
E-mail: vnenkov@mail.bg