Educational Matters
Научно-методически статии

ТРИ ИНВАРИАНТЫ В ОДНУ ЗАДАЧУ

[1)]Ксения Горская, Дарья Коптева,
[2)]Асхат Ермекбаев, Арман Жетиру, Азат Бермухамедов, Салтанат Кошер,
[3)]Лили Стефанова, Ирина Христова, Александра Йовкова
[1)]Муниципальное бюджетное образовательное учреждение
„Средняя школа № 8“– Архангельск (Россия)
[2)]Областная специализированная школа-интернат для одаренных детей
с углубленным изучением различных предметов – Актау (Казахстан)
[3)]Природо-математическая гимназия – Ловеч (Болгария)

Аннотация. В статье представлены результаты работы международной команды учащихся, полученные в рамках реализации сетевого исследовательского проекта „Математическая мозаика“. Эти результаты получены в ходе исследования, которое проводилось с использованием программных продуктов GeoGebra, Geometer’s Sketchpad и Maple. Для доказательства утверждений использовался метод комплексных чисел.

Keywords: triangle; circle; locus; curve of second degree; complex number

В конце сентябре 2016 году мы приступили к совместной работе в рамках международного сетевого исследовательского проекта „Математическая мозаика“, Работы продолжались до начала мая 2017 года. Отправной точкой послужили три стартовые задачи, которые были предложены профессором Шабановой.

Задача 1 (для подкоманды Болгарии): *На сторонах AB и CB треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AM : MB = m$; $CN : NB = n$. Прямая MN пересекает AC в точке T . Исследуйте зависимость положения точки T от вида треугольника. Получите формулу для выражения отношения $AT : TC$.*

Задача 2 (для подкоманды России): *По двум пересекающимся прямым с равными скоростями движутся две точки A и B . Доказать, что существует такая точка плоскости, которая во все моменты времени равноудалена от них.*

Задача 3 (для подкоманды Казахстана): *Построить окружность, которая касается данной окружности и проходит через две данные точки плоскости, содержащие эту окружность.*

Мы должны были их решить, найти общее в трех, казалось бы, совершенно различных задачных ситуациях общее и составить новую задачу, которая объединяет в себе все три стартовые задачи. Данной статьей мы представляем главный результат совместной работы – общую задачу, которую мы назвали „математической мозаикой инвариантов“. В ходе работы мы использовали литературу, отмеченной в конце.

Дан произвольный треугольник ABC *и описанная около него окружность* Γ *с центром* O. *Точки* M *и* N *находятся на прямых* BA *и* BC *соответственно так, что* $AM : MB = \tilde{m}$ *и* $CN : NB = \tilde{n}$. *На прямой* MN *отмечены точки* P *и* Q *так, что ониодновременно внутренние (или внешние) по отношению к* Γ *и удовлетворяют условиям* $PM : PN = \tilde{p}$ *и* $QM : QN = \tilde{q}$. *Через точки* P *и* Q *проведены окружности* k_1 *и* k_2, *касающиеся окружности* Γ *в точках* U_1 *и* U_2 *соответственно. Прямая* MN *пересекает окружность* Γ *в точках* A_1 *и* A_2, *а* A_1' *и* A_2' *- это такие точки на* Γ, *что прямые* BA_1' *и* BA_2' *симметричны прямым* BA_1 *и* BA_2 *соответственно относительно* BU_1 *и* BU_2. *Точки* M *и* N *движутся по прямыми* BA *и* BC *так, что* $\frac{\tilde{m}}{\tilde{n}}$, $\tilde{p}$ *и* $\tilde{q}$ *постоянные числа. Предположим, что в некоторый момент времени движение прямой* MN *останавливается, фиксируя точки* A_j *и* A_j' *(или их образы/прообразы), потом движение продолжается. Точки фиксируются со скоростью* v_j $(j=1,2)$ *на прямых* BA_j *и* BA_j' $(j=1,2)$ *и продолжают двигаться по этими (неподвижными) прямым с теми же скоростями.Докажите, что:*

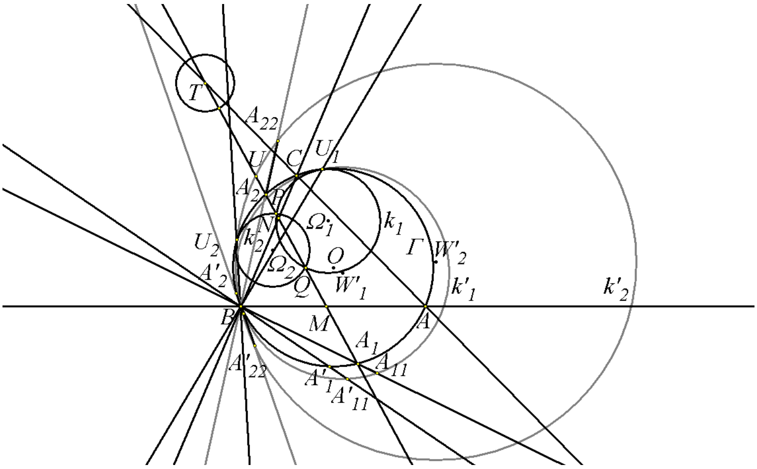
а) геометрическим местом прямых MN является пучок прямых, проходящих через постоянную точку T прямой AC;

б) все положения точек A_j и A_j' $(j=1,2)$ для соответственного им положения MN находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки, которая описывает Γ при изменении MN;

в) геометрическое место точек U пересечения касательных к Γ, проходящих через U_1 и U_2 является кривой второго порядка k';

г) центры Ω_1 и Ω_2 окружностей k_1 и k_2 описывают кривую второго порядка k'';

д) прямая OT является общей фокальной осью кривых k' и k''.



Решение. Утверждение а) по существу следует из стартовой задачи Болгарии, в которой точка T является инвариантом. Когда прямая MN движется вокруг T точки P и Q находятся на постоянном расстоянии от точки T. Каждая прямая MN содержит инвариантную точку U, которая является основным элементом в решении стартовой задачи Казахстана. Она определяет точки U_1 и U_2, которые необходимы для построения окружностей k_1 и k_2, касающихся Γ. Из решении стартовой задачи России следует, что все новые положения точек A_j и A'_j для соответственного положения MN находятся на одинаковом расстоянии от точки U_j $\left(j=1,2\right)$ (или ее диаметрально противоположной точки на). Следовательно, когда прямая MN движется, постоянная точка описывает окружность Γ. Так получаем утверждение б).

Для доказательства других утверждений рассмотрим нашу геометрическую конфигурацию в комплексной плоскости. Как обычно комплексное число, задающее положение точки на комплексной плоскости, обозначим маленькой буквой. Считаем, что окружность Γ имеет радиус равный единице, а ее центр является центром системы координат. Следовательно, $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$. При движении прямой MN точки P и Q движутся по окружностям, центр которых точка T. Поэтому существует момент, в котором точки P и Q займут положения P_0 и Q_0, при которых T, O, P_0 и Q_0 находятся на одной прямой. Следовательно, можно без ограничений общности считать, что движение MN начинается из этого положения и полагать $P\equiv P_0$ и $Q\equiv Q_0$. Поэтому рассматриваем координатную систему, в которой прямая OT является вещественной осью (осью абсцисс) и точки P и Q лежат на этой оси. Тогда будут выполняться равенства $\overline{p} = p$ и $\overline{q} = q$. Вообще реальная ось PQ задается уравнением $\overline{z} = z$. Уравнение прямой AC следующее: $z - ca\overline{z} \quad c \quad a$. Отсюда получается, что комплексная координата точки $T = PQ \cap AC$ следующая:

(1) $$t = \frac{c+a}{ca+1}.$$

Пусть прямая MN повернута на угол φ и точки P и Q заняли положения P_1 и Q_1. Тогда $p_1 = (p-t)e^{i\varphi} + t$ и $q_1 = (q-t)e^{i\varphi} + t$. Означаем $w = e^{i\varphi}$. Следовательно

(2) $$p_1 = (p-t)w + t,\ q_1 = (w \quad t)w \quad t,\ |w| = 1.$$

Пользуясь равенствами (1) и (2), получаем уравнения серединных перпендикуляров s_{P_1B} и s_{Q_1B} к отрезкам P_1B и Q_1B:

$$s_{P_1B}: \begin{aligned} &(ca+1)\left\{b(ca+1)p + [b(c+a)-(ca+1)]w - b(c+a)\right\}z \\ &+b(ca+1)w[(ca+1)wp-(c+a)w-b(ca+1)+c+a]\overline{z} = \\ &= w(ca+1)^2 p^2 + (w-1)^2(c+a)(ca+1)p - (c+a)^2 w^2 + \\ &+\left[(c+a)^2-(c^2-1)(a^2-1)\right]w-(c+a)^2, \end{aligned}$$

$$s_{Q_1B}: \begin{aligned} &(ca+1)\left\{b(ca+1)q + [b(c+a)-(ca+1)]w - b(c+a)\right\}z \\ &+b(ca+1)w[(ca+1)wq-(c+a)w-b(ca+1)+c+a]\overline{z} = \\ &= w(ca+1)^2 q^2 + (w-1)^2(c+a)(ca+1)q - (c+a)^2 w^2 + \\ &+\left[(c+a)^2-(c^2-1)(a^2-1)\right]w-(c+a)^2, \end{aligned}$$

Решая систему образованную уравнениями s_{P_1B} и s_{Q_1B}, находим комплексную координату центра W_b описанную около треугольника BPQ окружность k_b представим в виде:

(3) $$\begin{aligned} w_b = b\{&-(ca+1)w^2pq + (ca+1)[w(c+a)-a+b-c+abc]w(p+q) + \\ &+\left[(c+a)(ca+1)b-(c+a)^2-(ca+1)^2\right]w^2 + 2(c+a)(a-b+c-abc)w - \\ &-(c+a)(a-b+c-abc)\}\big/(ca+1)[(ab+bc-ca-1)w^2 - b(a-b+c-abc)]. \end{aligned}$$

Радиус r_b этой окружности находим из (3) и $r_{\grave{u}}^2 = (w \quad b)(\overline{w} \quad \overline{b})$. Получаем

$$r_b^2 = \left[(ca+1)wp-(c+a)w+a-b+c-abc\right]\left[(ca+1)wq-(c+a)w+a-b+c-abc\right]$$

$$(4)\quad \left[b(ca+1)p+(ab+bc-ca-1)w-b(c+a)\right]\left[b(ca+1)q+(ab+bc-ca-1)w-b(c+a)\right]/$$

$$/(ca+1)^2\left[(ab+bc-ca-1)w^2-b(a-b+c-abc)\right]^2.$$

Вставим равенства (3) и (4) в уравнение $\left(z-w_b\right)\left(\overline{z}-\overline{w}_b\right)=r_b^2$ окружности k_b и получаем равенство:

$$(ca+1)\left[(ab+bc-ca-1)w^2-b(a-b+c-abc)\right]z\overline{z}$$

$$\Big[-(c+a)^2\,pq-(ca+1)\left[(ab+bc-ca-1)w-b(c+a)\right](p+q)-$$

$$-(c+a)(ab+bc-ca-\text{ù})w^2+\quad(c+a)(ab+bc-ca-\quad)w+$$

$$+b(c+a)^2+b(ca+1)^2-(c+a)(ca+1)\Big]z+$$

$$-b\Big\{-(c+a)^2w^2pq+(ca+1)\left[(c+a)w-(a-b+c-abc)\right]w(p+q)+$$

$$+\left[b(c+a)^2+b(ca+\text{ù})^2-(c+a)(ca+\quad)\right]w^2+\quad(c+a)(a-b+c-abc)w+$$

$$+(c+a)(a-b+c-abc)\Big\}\overline{z}+\left(b^{\text{ù}}-w\quad\right)(ca+\text{ù})^2\,pq-(\quad-w)(b\quad+w)(c+a)(ca+\quad)(p+q)-$$

$$-(1-w)(c+a)\Big\{\left[b(ab+bc-ca)-(a+b+c)\right]w-\left[b(ab+bc+ca)+a-b+c\right]\Big\}=0$$

Вставим в последнее равенство $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ (получается из уравнения). Так получаем, что комплексная координата второй точки B_1 пересечения k_b и Γ выражается формулой

$$b_1=\Big\{(c+a)^2w^2pq+(ca+1)\left[(c+a)w-a+b-c+abc\right]w(p+q)+$$

$$-\left[(c+a)^2+(ca+1)^2-b(c+a)(ca+1)\right]w^2+2(c+a)(a-b+c-abc)w-$$

$$(5)\quad -(c+a)(a-b+c-abc)\Big\}/$$

$$\Big\{b(ca+1)^2\,pq+(ca+1)\left[(ab+bc-ca-1)w-b(c+a)\right](p+q)$$

$$+(c+a)(ab+bc-ca-1)w^2-2(c+a)(ab+bc-ca-1)w+$$

$$+b(c+a)^2+b(ca+1)^2-(c+a)(ca+1)\Big\}.$$

Прямые BB_1 и P_1Q_1 имеют уравнения $BB_1:\left(\overline{b}-\overline{b}_1\right)z-\left(b-b_1\right)\overline{z}=\overline{b}b_1-b\overline{b}_1$ и $P_1Q_1:\left(\overline{p}_1-\overline{q}_1\right)z-\left(p_1-q_1\right)\overline{z}=\overline{p}_1q_1-p_1\overline{q}_1$ соответственно. Отсюда (2) и (5) находим координату точки $U'=BB_{\text{ù}}\cap PQ$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} u' = \Big\{ &(ca+1)^2 w^2 pq + (c+a)(ca+1)(1-w)w\big(p+q\big) + \\ &+ \big[(c+a)^2 + (ca+1)^2\big] w^2 - 2(c+a)^2 w + (c+a)^2 \Big\} / \\ &/(ca+1)\big[(ca+1)w\big(p+q\big) + (c+a)(1-w)^2\big]. \end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\begin{aligned} \overline{u'} = \Big\{ &(ca+1)^2 pq - (c+a)(ca+1)(1-w)w\big(p+q\big) + \\ &+ (c+a)^2 w^2 - 2(c+a)^2 w + (c+a)^2 + (ca+1)^2 \Big\} / \\ &/(ca+1)\big[(ca+1)w\big(p+q\big) + (c+a)(1-w)^2\big]. \end{aligned} \tag{7}$$

Равенство (6) умножаем на $-(c+a)(ca+1)\overline{u'} + (c+a)^2$, а (7) – на $-(ca+1)^2 pq + (c+a)(ca+1)\big(p+q\big) - (c+a)^2 - (ca+1)^2 + (c+a)(ca+1)u'$. После суммирования полученных результатов находим уравнение, решение которого относительно w следующее:

$$\frac{(ca+1)^2 pq - (c+a)(ca+1)\big(p+q\big) + 2(c+a)^2 + (ca+1)^2 - (c+a)(ca+1)\big(u' + \overline{u'}\big)}{(ca+1)\big[(ca+1)\big(p+q\big) - 2(c+a)\big]\overline{u'} - (c+a)\big[(ca+1)\big(p+q\big) - 2(c+a)\big]}. \tag{8}$$

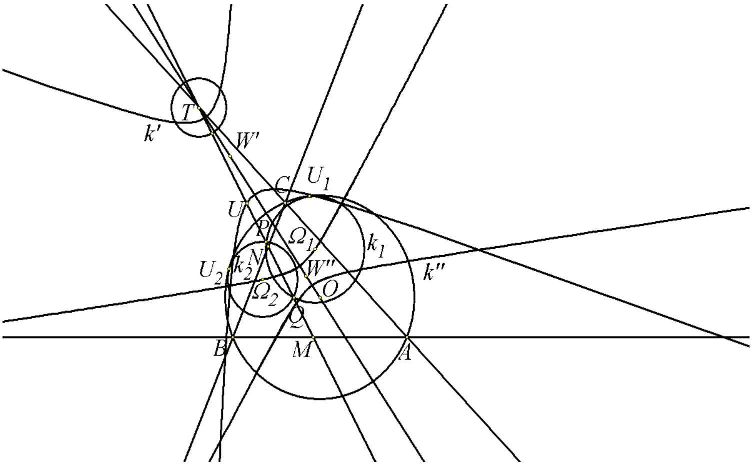
Теперь подставим в (6) равенства $u' = z$, $\overline{u'} = \overline{z}$ и (8). Так получается уравнение кривой k' второго порядка:

$$k' : A'z^2 + B'z\overline{z} + A'\overline{z}^2 + C'z + C'\overline{z} + D' = 0, \tag{9}$$

где

$$A' = (c+a)^2,\ B' = -(ca+1)^2\big(p+q\big)^2 + 4(c+a)(ca+1)\big(p+q\big) - (c+a)^2,$$
$$C' = (c+a)\big[(ca+1)\big(p^2+q^2\big) - 2(c+a)\big(p+q\big) - 2(ca+1)\big],$$
$$D' = \big(pq+1\big)\big[(ca+1)^{\grave{u}} pq - 2(c+a)(ca+1)\big(p+q\big) + 4(c+a)\ \ + (ca+1)\ \ \big].$$

Так мы доказали утверждение в).



Из конструкции окружности k_1 и k_2, касающиеся Γ, естественным образом следует идея об аналитическом выражении этих окружностей через их касательные точки U_1 и U_2. В начале находим уравнение $\left(z-\frac{u'}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{\overline{u'}}{2}\right)=\frac{u'\overline{u'}}{4}$ окружности k_b', проходящей через O, центром ее является середина OU' (точка с координатой $\frac{u'}{2}$). Так из (7) получается

$$
\begin{aligned}
&2(ca+1)\left[(ca+1)w(p+q)+(w-1)^2(c+a)\right]z\overline{z}\\
(8)\quad k_b':\ &-\left[(ca+1)^2pq+(c+a)(ca+1)(w-1)(p+q)+(c+a)^2(w-1)^2+(ca+1)^2\right]z-\\
&-\left[(ca+1)^2pq-(c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q)+(ca+1)^2(w-1)^2+(c+a)^2\right]\overline{z}=0.
\end{aligned}
$$

Потом из (8) и $\overline{z}=\frac{1}{z}$ находим уравнением, которому удовлетворяют координаты точек U_1 и U_2 где пересекаются k_b' и Γ:

$$
\begin{aligned}
&\left[(ca+1)^2pq+(c+a)(ca+1)(w-1)(p+q)+(c+a)^2(w-1)^2+(ca+1)^2\right]z^2-\\
(9)\quad &-2(ca+1)\left[(c+a)w(p+q)+(c+a)(w-1)^2\right]z+\\
&(ca+1)^2w^2pq-(c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q)+(ca+1)^2w^2+(c+a)^2(w-1)^2=0.
\end{aligned}
$$

Сейчас заметим, что центр Ω_j окружности $k_j\ (j=1,2)$ есть точка пересечения серединного перпендикуляра $s_{P_1Q_1}$ к отрезку P_1Q_1 и прямой OU_j $(j=1,2)$. Уравнения этих прямых представим следующим образом:

$$(10) \qquad s_{P_1Q_1} : (ca+1)z + w^2(ca+1)\overline{z} = (ca+1)w(p+q) + (c+a)(w-1)^2,$$

$$(11) \qquad OU_j : z - u_j^2\overline{z} = 0 \ (j=1,2).$$

Из (9) получается, что

$$u_j^2 = \Big\{2(ca+1)\Big[(c+a)w(p+q)+(c+a)(w-1)^2\Big]u_j -$$

$$-(ca+1)^2 w^2 pq + (c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q) - (ca+1)^2 w^2 - (c+a)^2(w-1)^2\Big\}/$$

$$/\Big[(ca+1)^2 pq + (c+a)(ca+1)(w-1)(p+q) + (c+a)^2(w-1)^2 + (ca+1)^2\Big].$$

Это равенство вставим в (11) и получим

$$\Big[(ca+1)^2 pq + (c+a)(ca+1)(w-1)(p+q) + (c+a)^2(w-1)^2 + (ca+1)^2\Big]z +$$

$$OU_j : +\Big\{(ca+1)\Big[(ca+1)w(p+q)+(c+a)(w-1)^2\Big]u_j +$$

$$+(ca+1)^2 w^2 pq - (c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q) + (ca+1)^2 w^2 + (c+a)^2(w-1)^2\Big\}\overline{z} = 0.$$

Последнее уравнение вместе с (10) приводит нас к равенству:

$$(12) \qquad \omega_j = \Big\{2(ca+1)\Big[(ca+1)w(p+q)+(w-1)^2(c+a)\Big]u_j -$$

$$-(ca+1)^2 w^2 pq + (c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q) - (ca+1)^2 w^2 - (c+a)^2(w-1)^2\Big\}/$$

$$/(ca+1)\Big[2(ca+1)u_j + (c+a)(w^2-1)\Big],$$

$$(12') \qquad \overline{\omega_j} = \Big[(ca+1)^2 pq + (c+a)(ca+1)(w-1)(p+q) + (c+a)^2(w-1)^2 + (ca+1)^2\Big]/$$

$$/(ca+1)\Big[2(ca+1)u_j + (c+a)(w^2-1)\Big].$$

Так как наши ожидания такие, что центры Ω_1 и Ω_2 лежат на кривой второго порядка k'', то мы определяем эту кривую по пяти точкам. В (9) для w подставим следующие значения: $w' = 1$ и $w'' = -1$. Получаем соответственные решения:

$$u_1' = \frac{p+q+i\sqrt{\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)}}{pq+1},\ u_2' = \frac{p+q-i\sqrt{\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)}}{pq+1},$$

$$u_1'' = \Big\{4(c+a)(ca+1)-(c+a)^2(p+q)+$$

$$+i\sqrt{\left[(ca+1)(p+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(p-1)-2(c+a)^2\right]}\times$$

$$\times\sqrt{\left[(ca+1)(q+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(q-1)-2(c+a)^2\right]}\Big\}/$$

$$/\left[(ca+1)^2 pq-2(c+a)(ca+1)(p+q)+4(c+a)^2+(ca+1)^2\right],$$

$$u_2'' = \Big\{4(c+a)(ca+1)-(c+a)^2(p+q)+$$

$$+i\sqrt{\left[(ca+1)(p+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(p-1)-2(c+a)^2\right]}\times$$

$$\times\sqrt{\left[(ca+1)(q+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(q-1)-2(c+a)^2\right]}\Big\}/$$

$$/\left[(ca+1)^2 pq-2(c+a)(ca+1)(p+q)+4(c+a)^2+(ca+1)^2\right].$$

Отсюда, (12) и $(12')$ находим центры

$$\omega_1' = \frac{p+q+i\sqrt{\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)}}{2},\ \omega_2' = \frac{p+q-i\sqrt{\left(p^2-1\right)\left(q^2-1\right)}}{2},$$

$$\omega_1'' = \Big\{-(ca+1)\left[(ca+1)(p+q)-4(c+a)\right]+$$

$$+i\sqrt{\left[(ca+1)(p+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(p-1)-2(c+a)^2\right]}\times$$

$$\times\sqrt{\left[(ca+1)(q+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(q-1)-2(c+a)^2\right]}\Big\}/$$

$$/2(ca+1)^2,$$

$$\omega_2'' = \Big\{-(ca+1)\left[(ca+1)(p+q)-4(c+a)\right]+$$

$$-i\sqrt{\left[(ca+1)(p+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(p-1)-2(c+a)^2\right]}\times$$

$$\times\sqrt{\left[(ca+1)(q+1)-2(c+a)^2\right]\left[(ca+1)(q-1)-2(c+a)^2\right]}\Big\}/$$

$$/2(ca+1)^2.$$

Так мы нашли четыре точки кривой k''. Нам нужна еще одна точка. Решение (9) при $w=i$ следующие:

$$u_1'''=\Big\{i(ca+1)\big[(ca+1)(p+q)-2(c+a)\big]+$$

$$+\sqrt{(ca+1)^2p^2-2(c+a)(ca+1)p+(c+a)^2-(c^2-1)(a^2-1)}\times$$

$$\times\sqrt{(ca+1)^2q^2-2(c+a)(ca+1)q+(c+a)^2-(c^2-1)(a^2-1)}\Big\}/$$

$$/\Big\{(ca+1)\big[(ca+1)(pq+1)-(c+a)(p+q)\big]+i\big[(ca+1)(p+q)-2(c+a)\big]\Big\},$$

$$u_2'''=\Big\{i(ca+\text{ù})\big[(ca+\ )(p+q)-\ (c+a)\big]-$$

$$-\sqrt{(ca+1)^2p^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)p+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}\times$$

$$\times\sqrt{(ca+1)^2q^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)q+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}\Big\}/$$

$$/\Big\{(ca+1)\big[(ca+1)(pq+1)-(c+a)(p+q)\big]+i\big[(ca+1)(p+q)-2(c+a)\big]\Big\}.$$

Из первого равенства, (12) и $(12')$ находим

$$\omega_1'''=\Big\{-(ca+1)^{\text{ù}}p^2q^2+2(c+a)(ca+1)\ (p+q)pq+2(c^2-1)(a^2-1)(ca+1)\ (p^2+q^2)-$$

$$-2(c+a)(ca+1)\big[(ca+1)^2-2(c^2-1)(a^2-1)\big](p+q)-$$

$$-(ca+1)^2+2(c+a)^2-2(c+a)(ca+1)+$$

$$+2i(ca+1)\big[(ca+1)(p+q)-2(c+a)\big]\times$$

$$\times\sqrt{(ca+1)^2p^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)p+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}\times$$

$$\times\sqrt{(ca+1)^2q^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)q+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}$$

$$/(ca+1)\Big\{(c^2-1)(a^2-1)\big[(ca+1)(p+q)-2(c+a)\big]-$$

$$-(c+a)(ca+\text{ù})\big[(ca+\ )(pq+\ )-(c+a)(p+q)\big]+$$

$$+(c+a)\times\sqrt{(ca+1)^2p^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)p+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}\times$$

$$\times\sqrt{(ca+1)^2q^{\text{ù}}-2(c+a)(ca+1)q+(c+a)^2-(c\ \ -1)(a\ \ -1)}\Big\}.$$

В общем уравнении $a_{11}z^2+a_{12}z\overline{z}+a_{22}\overline{z}^2+a_{13}z+a_{23}\overline{z}+a_{33}=0$ кривой второго порядка поставим вместо z значения ω_1', ω_2', ω_1'', ω_2'' и ω_1'''. Получается система пяти уравнений относительно неизвестных $\frac{a_{11}}{a_{33}}$, $\frac{a_{12}}{a_{33}}$, $\frac{a_{22}}{a_{33}}$, $\frac{a_{13}}{a_{33}}$ и $\frac{a_{23}}{a_{33}}$. После решения этой системы получим, что искомая кривая имеет следующее уравнение

$$k'' : A''z^2 + B''z\overline{z} + A''\overline{z}^2 + C''z + C''\overline{z} + D'' = 0, \tag{13}$$

где

$A'' = (c+a)^2$, $B'' = 2\left[\left(c^2-1\right)\left(a^2-1\right)-(ca+1)^2\right]$,

$C'' = 2(c+a)\left[(ca+1)(pq+1)-(c+a)(p+q)\right]$,

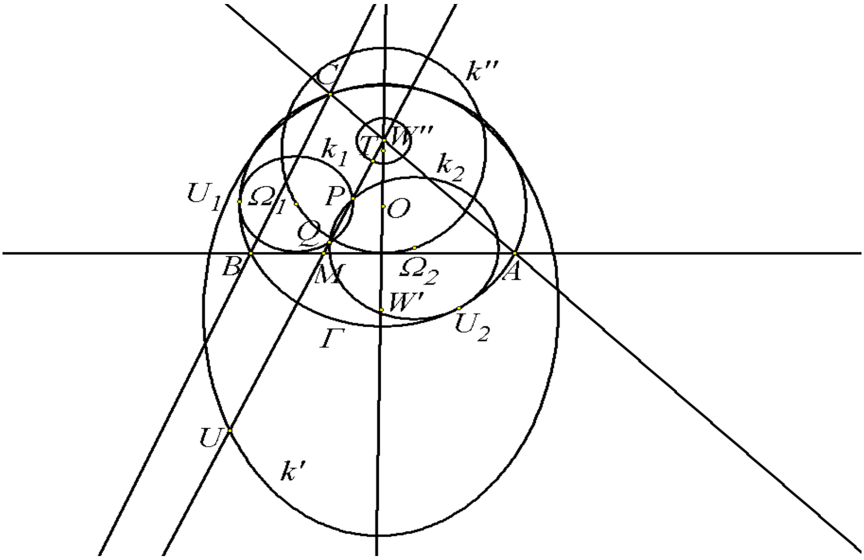
$D'' = \left[(ca+1)(pq+1)-(c+a)(p+q)\right]^2$.

Мы получили уравнение одной кривой, но это не значит, что эта кривая содержит центры всех окружностей k_1 и k_2. Убедимся, что это так. В левую частью (13) вместо z и $\overline{z}$ подставим ω_j и $\overline{\omega}_j$ из (12) и $(12')$. Получается выражение

$$\begin{aligned}
&4\left[(ca+1)^2 pq+(c+a)(ca+1)(w-1)(p+q)+(c+a)^2(w-1)^2+(ca+1)^2\right]\times\\
&\times\Big\{\left[(ca+1)^2 pq+(c+a)(ca+1)(w-1)(p+q)+(c+a)^2(w-1)^2+(ca+1)^2\right]u_j^2-\\
&-2(ca+1)\left[(c+a)w(p+q)+(c+a)(w-1)^2\right]u_j+\\
&+(ca+1)^2 w^2 pq-(c+a)(ca+1)(w-1)w(p+q)+(ca+1)^2 w^2+(c+a)^2(w-1)^2\Big\}/\\
&/\left[2(ca+1)u_j+\left(w^2-1\right)(c+a)\right]^2
\end{aligned}$$

Из (9) следует, что второй множитель равен нулю. Следовательно, ω_j принадлежит k'' для каждой k_j $(j=1,2)$.

Отсюда следует, что утверждение г) доказано.



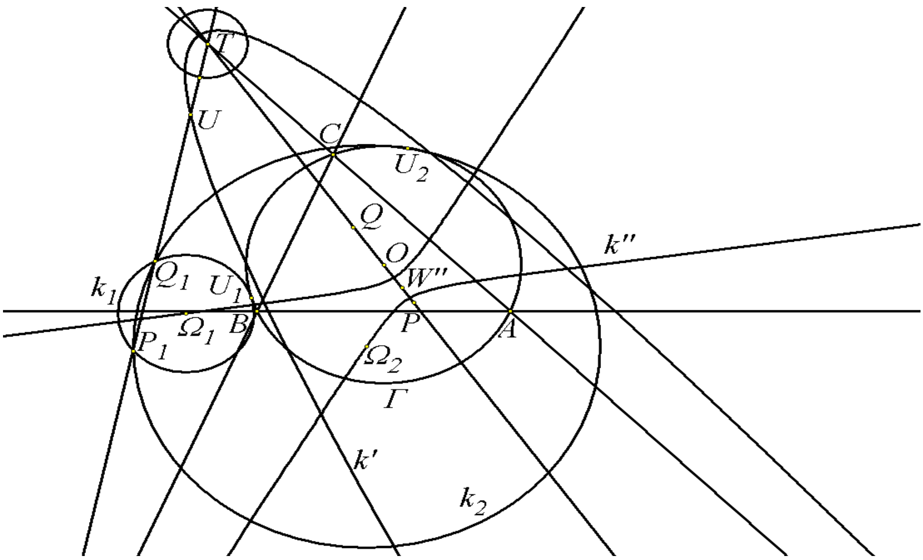
Сейчас поставим в (9) и (13) равенства $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$. Эти уравнения перейдут соответственно в следующие:

$$(14) \qquad k' : \operatorname{Re}(B' + 2A')x^2 + \operatorname{Re}(B' - 2A')y^2 + 2\operatorname{Re}(C')x + \operatorname{Re}(D') = 0,$$

$$(15) \qquad k'' : \operatorname{Re}(B'' + 2A'')x^2 + \operatorname{Re}(B'' - 2A'')y^2 + 2\operatorname{Re}(C'')x + \operatorname{Re}(D'') = 0.$$

Отсюда получается, что прямая OT (вещественная ось координатной системы) является фокальную осью для k' и k''. Так доказано и утверждение д).

В этой задаче мы собрали все стартовые задачи. Получили пучок прямых, проходящих через постоянную точку T – инвариант Болгарии. Потом инварианты России оказались на одной окружность, центр которой назовем центром инвариантов России. Инварианты в задаче Казахстана мы нашли на одной кривой второго порядка, центр которой назовем центром инвариантов Казахстана. Все центры инвариантов оказались на одной прямую. Если число t изменится, точка T (инварианта Болгарии) описывает прямую AC, тогда общая фокальная ось кривых k' и k'', содержащая центр инвариантов Казахстана, переходит через постоянную точку – центр инвариантов России. Иначе фокальная ось кривых k' и k'' проходит через постоянную для треугольника ABC точку (центр описанной окружности). Это точка является инвариантной при перемещении точки T по AC. Таким образом мы собрали три задачи в одну, при решении которой нашли один общий инвариант. Это и было целью проекта.



REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Balk, M., G. Balk & A. Poluhin (1988). *Real applications of imaginary numbers* (in Russian). Kiev: Radjanska Shkola. [Балк, М., Г. Балк & А. Полухин (1988). *Реальные приминения мнимых чисел*. Киев: Радянська Школа].

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and the space* (in Bulgarian). Sofia: Arhimedes 2000 [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000].

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the triangle medians* (in Bulgarian). Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника.* София: Архимед 2000].

Modenov, P. (1969). *Analytical geometry* (in Russian). Moscow: Moscow University. [Моденов, П. *Аналитическая геометрия*. Москва: Московский университет].

Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Foundations of Dynamic Geometry* (in Russian). Moscow: ASOU. [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ].

Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt.* (4th ed.) (in Bulgarian). Sofia: iztok-Zapad. (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages. [Георгиева, М. & С. Гроздев (2016).

Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект. (4-то изд.). София: Изток – Запад].

THREE INVARIANTS IN ONE PROBLEM

Abstract. The paper presents results of the work of an international group of students in the frames of the realization of the research net project "Mathematical mosaic". The results are obtained during investigations applying software products GeoGebra, Geometer's Sketchpad and Maple. The method of the complex numbers is used for the proofs of the assertions.

✉ **Ms. Gorskaya Kseniya, student**
22 – 201, Avenue Shabalina
163060 Arkhangelsk, Russia
E-mail:mgorksuvas@mail.ru

✉ **Ms. Kopteva Daria, student**
34 – 1 – 82, Avenue Novgorodski
163061 Arkhangelsk, Russia
E-mail:kopteva-8@yandex.ru

✉ **Mr. Ermekbaev Ashat, student**
21 – 118, 5 microdistrict
130200 Zhanaozen, Mangystau, Kazakhstan
E-mail: ashat_2000@mail.ru

✉ **Mr. Zhetiru Arman, student**
26 – 651, Umirzak, Rauan
130000 Aktau, Mangystau, Kazakhstan
E-mail: 13_arman_13@mail.ru

✉ **Mr. Bermuhamedov Azat, student**
29 microdistrict, Tolkyn - 2
130000 Aktau, Mangystau, Kazakhstan
E-mail: berdkol@mail.ru

✉ **Mr. Kosher Saltanat, student**
130000 Aktau, Mangystau, Kazakhstan
E-mail: salta2000@mail.ru

✉ **Ms. Lilly Stefanova, student**
Ms. Irina Hristova, student
Ms. Alexandra Yovkova, student
1, Acad. Urumov St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: lilly.ts.stefanova@gmail.com
E-mail: ihristova11@abv.bg
E-mail: alex.yovkova@gmail.com