

The proof of this theorem could be found in (Lopandić, 1971) and (Palman, 1994).

We will mention another theorem in the present paper, known in the mathematical literature on the Geometry of triangle as Euler-Gergonne's theorem. A proof of this theorem will be proposed and some interesting applications of it.

Theorem 4. Given is a triangle $\triangle ABC$ and let the segments AX, BY and CZ be concurrent, where $X \in BC, Y \in AC$ and $Z \in AB$. If $u = \frac{AK}{KX}, v = \frac{BK}{KY}$ and $w = \frac{CK}{KZ}$, then:

$$(1) \quad \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1$$

Proof:

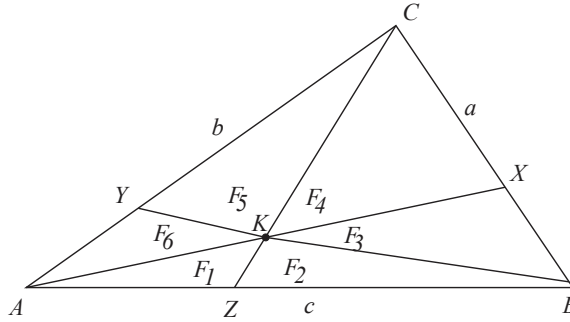


Fig.1

Let F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 and F_6 be the areas of the triangles $\triangle AKZ, \triangle BKZ, \triangle BKY, \triangle CKX, \triangle CKY$ and $\triangle AKY$ (Figure 1.). Using the formula for the area of a triangle, we get:

$$(2) \quad u = \frac{AK}{KX} = \frac{F_1 + F_2}{F_3} = \frac{F_5 + F_6}{F_4},$$

$$(3) \quad v = \frac{BK}{KY} = \frac{F_3 + F_4}{F_5} = \frac{F_1 + F_2}{F_6},$$

$$(4) \quad w = \frac{CK}{KZ} = \frac{F_5 + F_6}{F_1} = \frac{F_3 + F_4}{F_2}.$$

If F is the area of the triangle $\triangle ABC$, then $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$ and it follows that:

$$\frac{1}{1+u} = \frac{F_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{F_4}{F_4 + F_5 + F_6} = \frac{F_3 + F_4}{F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6} = \frac{F_3 + F_4}{F},$$

$$\frac{1}{1+v} = \frac{F_5}{F_3 + F_4 + F_5} = \frac{F_6}{F_6 + F_1 + F_2} = \frac{F_5 + F_6}{F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_1 + F_2} = \frac{F_5 + F_6}{F},$$

$$\frac{1}{1+w} = \frac{F_1}{F_1 + F_5 + F_6} = \frac{F_2}{F_2 + F_3 + F_4} = \frac{F_1 + F_2}{F_1 + F_5 + F_6 + F_2 + F_3 + F_4} = \frac{F_1 + F_2}{F}.$$

Summing up the above three equations, we obtain (1).

By means of relation (1) we will prove the following two assertions:

Assertion 1. Given is an acute triangle $\triangle ABC$. Let the points D, E and F be the feet of the altitudes from the vertices A, B and C to the sides BC, CA and AB , respectively, and let H be the orthocentre of the triangle. Then:

$$(5) \quad \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF} = 2.$$

Proof: We will prove the more general assertion, which states, that:

$$(6) \quad \frac{AK}{AX} + \frac{BK}{BY} + \frac{CK}{CZ} = 2,$$

where the points X, Y, Z and K have the same meaning as in the proof of Theorem

4. If $u = \frac{AK}{KX}$, $v = \frac{BK}{KY}$ and $w = \frac{CK}{KZ}$, then

$$(7) \quad \frac{AK}{AX} = \frac{AK}{AK + KX} = \frac{\frac{AK}{KX}}{1 + \frac{AK}{KX}} = \frac{u}{1+u},$$

$$(8) \quad \frac{BK}{BY} = \frac{BK}{BK + KY} = \frac{\frac{BK}{KY}}{1 + \frac{BK}{KY}} = \frac{v}{1+v},$$

$$(9) \quad \frac{CK}{CZ} = \frac{CK}{CK + KZ} = \frac{\frac{CK}{KZ}}{1 + \frac{CK}{KZ}} = \frac{w}{1+w}.$$

Further, using (1), we obtain:

$$3 - 1 = \left(\frac{1+u}{1+u} + \frac{1+v}{1+v} + \frac{1+w}{1+w} \right) - \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} \right) \Leftrightarrow 2 = \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} + \frac{w}{1+w}.$$

It follows from (7), (8) and (9), that:

$$\frac{AK}{AX} + \frac{BK}{BY} + \frac{CK}{CZ} = 2$$

and we are done. Take now $K \equiv H$, $X \equiv D$, $Y \equiv E$ and $Z \equiv F$. Thus, we get (5).

Assertion 2. Let P be an arbitrary point in the interior of a triangle $\triangle ABC$ and let the lines AP, BP and CP intersect the sides BC, CA and AB in the points X, Y and Z , respectively. Prove that:

$$(10) \quad \frac{PA}{PX} \cdot \frac{PB}{PY} + \frac{PB}{PY} \cdot \frac{PC}{PZ} + \frac{PC}{PZ} \cdot \frac{PA}{PX} \geq 12.$$

Proof: Let $u = \frac{PA}{PX}$, $v = \frac{PB}{PY}$ and $w = \frac{PC}{PZ}$. The inequality is equivalent to:

$$(11) \quad uv + vw + wu \geq 12.$$

We have

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1 \Leftrightarrow (1+v)(1+w) + (1+u)(1+w) + (1+u)(1+v) = (1+u)(1+v)(1+w),$$

which is equivalent to

$$(12) \quad u + v + w + 2 = uvw.$$

Apply now the arithmetic-harmonic inequality:

$$\frac{(1+u) + (1+v) + (1+w)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w}} \Leftrightarrow (1+u + 1+v + 1+w) \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} \right) \geq 9.$$

By means of (1) we get $3 + u + v + w \geq 9$, i.e.

$$(13) \quad u + v + w \geq 6.$$

By (12) and (13) we have:

$$(14) \quad uvw \geq 8.$$

Finally, we apply the arithmetic-geometric inequality:

$$\frac{uv + vw + wu}{3} \geq \sqrt[3]{uv \cdot vw \cdot wu}, \text{ i.e.}$$

$$uv + vw + wu \geq 3\sqrt[3]{u^2 v^2 w^2} \Leftrightarrow uv + vw + wu \geq 3\sqrt[3]{64} \Leftrightarrow uv + vw + wu \geq 12,$$

and we are done.

The equality in (11) holds true iff $u=v=w=2$, i.e. iff $\frac{PA}{PX} = \frac{PB}{PY} = \frac{PC}{PZ} = 2$, i.e. when the point P is the centroid of the equilateral triangle $\triangle ABC$.

REFERENCES

- Arslanagić, Š. (2005). *Matematika za nadarene*. Sarajevo: Bosanska riječ.
Gusić, I. (1995) *Matematički riječnik*. Zagreb: Element.
Lopandić, D. (1971). *Zbirka zadataka iz osnova geometrije*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Savez studenata Prirodnomatematičkog fakulteta.
Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2017). *Geometry of Complex Numbers*. Skopje: Union of Mathematicians of Macedonia. (ISBN 978-9989-646-94-2), 278 pages.
Palman, D. (1994). *Trokut i kružnica*. Zagreb: Element.

✉ **Prof. Šefket Arslanagić, DSc**
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
University of Sarajevo
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
E-mail: asefket@pmf.unsa.ba

ЕДНО ТВЪРДЕНИЕ ЗА КОНКУРЕНТНОСТ НА ПЕДАЛНИ ОКРЪЖНОСТИ НА ТОЧКА В РАВНИНАТА НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Хаим Хаимов

Резюме. В тази публикация се доказва, че педалните окръжности на произволна точка в равнината на четириъгълник относно триъгълниците, определени от страните и диагоналите на последния, се пресичат в една точка. С помощта на това твърдение се дефинира едно изображение в равнината на произволен четириъгълник. Намират се образите на някои забележителни точки в четириъгълника. Описват се връзките на изображението с други трансформации в равнината на четириъгълник.

Keywords: quadrilateral; pedalcircles; transformations; remarkablepoints

Педална окръжност на точка спрямо триъгълник наричаме окръжността, определена от ортогоналните проекции на точката върху правите, съдържащи страните му (като при това предполагаме, че точката не лежи на описаната около триъгълника окръжност). В случая, когато точката е от описаната около триъгълника окръжност, според теоремата на Симсън ортогоналните ѝ проекции върху правите, съдържащи страните на последния, лежат на една права – права на Симсън. Можем да кажем, че в този случай педалната окръжност на точката относно триъгълника се заменя от педална права – права на Симсън.

Известно е още от началото на XX век, че педалните окръжности (правите на Симсън) на върховете A , B , C и D на произволен четириъгълник $ABCD$ относно триъгълниците съответно BCD , CDA , DAB и ABC от останалите тройки върхове, минават през една точка. Към този геометричен факт тук ще добавим друг, подобен на него. Именно, ще докажем следната:

Теорема 1. Педалните окръжности на произволна точка X в равнината на произволен четириъгълник $ABCD$, нележаща на една окръжност с някои три от върховете му, спрямо триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB , определени от страните и диагоналите на последния, минават през една точка.

Доказателство. Нека за определеност точката X лежи в $\triangle ABC$. При друго разположение на точката X разсъжденията са аналогични. Означаваме ортогоналните проекции на X върху правите AB , BC , CD , DA , AC и BD съответно с A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 и F_1 (фиг.1). Педалната окръжност (k_B) на точката X относно $\triangle ABC$ е определена от точките A_1, B_1 и A_1 , тази относно $\triangle BCD$ (окръжността