

ТЕОРЕТИКО-ПРИЛОЖНИ ОСНОВИ НА ВЕКТОРНО-АЛГЕБРИЧНО МОДЕЛИРАНЕ В ОБУЧЕНИЕТО ПО ГЕОМЕТРИЯ

Ирина Вутова

Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Работата се състои от две части – теоретична и приложна. В теоретичната част е направена селекция и класификация на основните понятия (обекти и релации) и твърдения (аксиоми и теореми) от геометричната система на Вайл за целите на векторно-алгебричното моделиране в елементарната геометрия. В приложната част са поместени в определен ред и са решени с векторни средства шест геометрични задачи, които освен доказателствени илюстрират и евристични възможности на векторно-алгебричното моделиране в обучението по геометрия.

Keywords: vector algebra, modeling, education, geometry, heuristics

Предварителни бележки. До 1918 г., когато излиза от печат книгата „Пространство, време, материя“ на големия немски математик Херман Вайл (1885 – 1955), векторите са все още „физични“ величини, изучавани само за целите на механиката, и курсовете по геометрия се изграждат без „векторно“ участие. Лекциите на професор Вайл запознават математическата общественост с нова, различна от Евклидовата, концепция за изграждане на елементарната геометрия. Водеща в тази концепция е идеята за векторно пространство. Тази идея разкрива фундаменталната роля, която векторите играят в най-древната математическа наука, и променя традиционното разбиране и за училищния курс по геометрия.

От формална гледна точка системата на Вайл е само един от възможните пътища за аксиоматизиране на геометрията, еквивалентен на хилбертовския, който позволява да се докажат всички теореми. Но от методологическа гледна точка пътят на Вайл е много важен. Вместо уморителните и дълги вериги от разсъждения вайлевската схема дава изключително ясно изложение, наситено със съвременни идеи, близки и много актуални и в други раздели на човешкото знание. В своята книга „Линейна алгебра и аналитична геометрия“, когато говори за векторния метод, известният френски математик Жан Дьодоне пише: „Обучението по математика „по Евклид“ е било нелюбопитна подготовка за по-нататъшни занимания с математика за съвременниците на Виет и даже за съвременниците на Коши“ (Дьодоне, 1972:

11). Сега положението коренно се е изменило. „С помощта на тривиални изчисления може непосредствено и на няколко реда да се получи всичко това, за което по-рано е било нужно въвеждането на „каскада“ от изкуствени и сложни системи триъгълници, за да може на всяка цена да се сведе задачата към „свещените“ случаи на еднаквост и подобност на триъгълници – към единствената основа на цялата традиционна техника на Евклид“ (Дъедоне, 1972: 14).

Методът на Вайл има и особена методическа стойност, защото позволява геометричните ситуации да бъдат заменени с векторно-алгебрични. От една страна, в много случаи векторното моделиране алгоритмизира решението на геометричната задача, а от друга страна, открива пътя за нейни обобщения, продължения или аналогии. И всичко това прави задачата достъпна не само за студента по математика – бъдещ учител, но и за ученика от последните класове на средното училище. В този ред на мисли ще добавим, че една от важните компетенции на съвременния учител по математика е владенето не само на векторно-алгебричния метод, но и доброто познаване на неговите евристични възможности.

За тази цел, позовавайки се на книгата „Елементарная геометрия“ (Болтянский, 1985), ние избрахме и систематизирахме най-важните (по наше мнение) векторно-алгебрични понятия и твърдения, чрез които се моделират основните елементарно-геометрични обекти и релации. Идеята е да бъдат улеснени учащите се в прехода от геометрия към векторна алгебра и обратно. Известно е, че съществува богата колекция от съдържателни приложения на векторната алгебра в геометрията, при които не е необходимо да се използва метрика. Това обстоятелство мотивира нашето решение да ограничим предмета на търсенията и да се съсредоточим в рамките на **афинно** векторно-алгебрично моделиране, още повече че аксиоматиката на Вайл ясно и точно отделя афинната от метричната геометрия.

Моделиране на геометрични обекти, независещи от размерността. Основни принципи на векторно-алгебричното моделиране в геометрията са заложили в няколко твърдения, някои от които са аксиоми в геометричната система на Вайл.

От първата група аксиоми (за свойствата на нанасянето на вектор) от аксиоматиката на Вайл непосредствено следва, че геометричното понятие **наредена двойка точки (насочена отсечка)** се моделира с понятието **вектор**. Става дума за първите три аксиоми.

A1. За всяка точка A и всеки вектор $\vec{a}$ съществува единствена точка B , така че $\vec{AB} = \vec{a}$ (Правило за нанасяне на даден вектор с дадено начало).

A2. Ако векторите $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ са равни, т.е. $\vec{AB} = \vec{AC}$, то точките B и C съвпадат, т.е. $B \equiv C$ (Ако два равни вектора имат общо начало, то те имат и общ край.)

От същата група твърдения следва, че релацията **наредена тройка точки** (A, B, C) се моделира с **векторното равенство** $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

A3. За всеки три точки A, B, C е вярно равенството $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Правило на триъгълника) (Болтянский, 1985/стр. 11).

От втората група аксиоми (за свойствата на събирането на вектори) от аксиоматиката на Вайл непосредствено следва, че наредената двойка **съвпадащи точки (нулевата отсечка)** (A, A) се моделира с **нулевия вектор**, а **наредените двойки точки** (насочени отсечки) (A, B) и (B, A) се моделират с **противоположни вектори**. Това са аксиомите A4 и A5.

A4. За всяка точка A е вярно, че $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$;

A5. За всеки две точки A и B е вярно равенството $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, т.е. векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ са противоположни.

Става ясно, че между множеството на точките (от пространството) и множеството на векторите с общо начало O (радиус-векторите) съществува биективно изображение, т. е. на всяка точка A съответства точно един вектор $\overrightarrow{OA}$ и обратно. Векторът $\overrightarrow{OA}$ се нарича **радиус-вектор** на точката A .

От формулираните аксиоми произтичат следствия за: **среда на отсечка, деление на отсечка от точка в дадено отношение, медиана в триъгълник, медицентър на триъгълник, средна отсечка в триъгълник, средна отсечка в четириъгълник, медицентър на четириъгълник, ъглополовяща в триъгълник, пресечна точка на ъглополовящите**, изразени със съответни **векторно-алгебрични равенства**. И по-конкретно, това са теоремите от T1 до T13.

T1. Точката M е среда на отсечката AB тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

T2. Точката M е среда на отсечката AB тогава и само тогава, когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}, \text{ където } O \text{ е произволна точка.}$$

От теорема T2 следва „векторната“ формула за медианата AA_1 в триъгълник ABC

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

T3. Точката M дели отсечката AB в отношение k ($k \neq -1$), считано от A тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AB}$.

T4. Точката M дели отсечката AB в отношение k ($k \neq -1$), считано от A , тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{OM} = \frac{k}{1+k} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{OB}$, където O е произволна точка.

T5. Точката M е медицентър на триъгълник ABC тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

T6. Точката M е медицентър на триъгълник ABC тогава и само тогава, когато $\vec{OM} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}$, където O е произволна точка.

T7. Точката M е медицентър на четириъгълник (тетраедър) $ABCD$ тогава и само тогава, когато $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

T8. Точката M е медицентър на четириъгълник (тетраедър) $ABCD$ тогава и само тогава, когато $\vec{OM} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC} + \frac{1}{4}\vec{OD}$, където O е произволна точка.

T9. Ако точките M и N са среди съответно на отсечките AC и BC , то $\vec{MN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

T10. Ако точките M и N са среди съответно на отсечките AD и BC , то $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}$.

T11. Отсечката CC_1 е вътрешна ъглополовяща на триъгълник ABC със страни $CB = a$ и $CA = b$ тогава и само тогава, когато $\vec{CC_1} = \frac{a}{a+b}\vec{CA} + \frac{b}{a+b}\vec{CB}$.

T12. Точката L е пресечна точка на вътрешните ъглополовящи (център на вътрешно вписаната окръжност) на $\triangle ABC$ със страни съответно a , b и c тогава и само тогава, когато $a\vec{LA} + b\vec{LB} + c\vec{LC} = \vec{0}$.

T13. Точката L е пресечна точка на вътрешните ъглополовящи (център на вътрешно вписаната окръжност) на $\triangle ABC$ със страни a , b и c съответно тогава и само тогава, когато $\vec{OL} = \frac{a}{a+b+c}\vec{OA} + \frac{b}{a+b+c}\vec{OB} + \frac{c}{a+b+c}\vec{OC}$, където точката O е произволна.

Моделиране на геометрични обекти, зависещи от размерността. Правата е производно понятие в аксиоматиката на Вайл, което се дефинира с векторно-алгебрични средства. Дефиницията на Вайл дава възможност понятието **права** и релациите **принадлежност на точка към права**, **колинеарност на три точки** и **колинеарност на две прави** да се моделират с векторни равенства. Тук се включват теоремите T14, T15 и T16.

T14. Правата a , определена от точката O и ненулевия вектор $\vec{a}$, е множество от точки M , така че $\vec{OM} = x\vec{a}$, където числото x описва множеството на реалните числа.

Векторът $\vec{a}$ се нарича **база** (направляващ вектор) на правата a .

T15. Точката M принадлежи на правата AB (точките A и B са различни) тогава и само тогава, когато съществува число x , така че $\vec{AM} = x\vec{AB}$.

В частност, точката M принадлежи на отсечката AB тогава и само тогава, когато $x \in [0, 1]$ (при $x = 0$, $M \equiv A$; при $x = 1$, $M \equiv B$).

По друг начин казано, правата a е едномерно векторно пространство с база, определена от който и да е ненулев вектор $\vec{a}$, колинеарен на правата.

T16. Правите a и b с вектори съответно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни (съвпадащи или успоредни) тогава и само тогава, когато векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни (съществуват число x , така че $\vec{b} = x\vec{a}$)

Равнината е производно понятие в аксиоматиката на Вайл, което се дефинира с векторно-алгебрични средства. Дефиницията на Вайл дава възможност понятието **равнина** и релациите **принадлежност на точка към равнина**, **компланарност на четири точки**, **компланарност на права и равнина**, **компланарност на две равнини** да се моделират с векторни равенства. Става дума за теоремите T17, T18, T19.

T17. Равнината α , определена от точката O и двойката неколинеарни вектори $(\vec{a}, \vec{b})$, е множеството от точки M , така че $\vec{OM} = x\vec{a} + y\vec{b}$, където всяко от числата x и y описва множеството на реалните числа.

Двойката вектори $(\vec{a}, \vec{b})$ се нарича **база** на равнината α .

T18. Точката M принадлежи на равнината (ABC) (точките A, B, C са неколинеарни) тогава и само тогава, когато съществува двойка числа (x, y) , така че $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.

В частност, точката M принадлежи на вътрешността или страните на успоредника с определящи вектори $\vec{AB}, \vec{AC}$ тогава и само тогава, когато $x \in [0, 1]$ и $y \in [0, 1]$ (при $x = 0, y = 0, M \equiv A$; при $x = 1, y = 0, M \equiv B$).

По друг начин казано, равнината α е двумерно векторно пространство с база двойка неколинеарни вектори $(\vec{a}, \vec{b})$.

T19. Правата c с направляващ вектор $\vec{c}$ е компланарна на равнината α с двойка базисни вектори $(\vec{a}, \vec{b})$ тогава и само тогава, когато векторът $\vec{c}$ е линейно зависим от базата $(\vec{a}, \vec{b})$ (съществуват числа x и y , така че $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$).

T20. Равнините α и β с бази съответно $(\vec{a}, \vec{b})$ и $(\vec{c}, \vec{d})$ са компланарни (съвпадащи или успоредни) тогава и само тогава, когато векторите на едната база $(\vec{c}, \vec{d})$ са линейно зависими от другата база $(\vec{a}, \vec{b})$ (съществуват числа x, y, u, v , така че $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \vec{d} = u\vec{a} + v\vec{b}$).

Пространството също може да бъде дефинирано с помощта на векторно-алгебрични средства. Тази дефиниция позволява релацията **принадлежност на точка към тримерното пространство** да се моделира с векторни равенства на основата на теореми T21 и T22.

T21. Нека $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е тройка некомпланарни вектори и O е точка. За всяка точка M съществува единствена наредена тройка числа (x, y, z) , така че $\vec{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Тройката некомпланарни вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ се нарича **база** на пространството.

С други думи, пространството е тримерно с база всяка тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ некомпланарни вектори.

T22. Нека точките A, B, C, D са некомпланарни. За всяка точка M съществува единствена наредена тройка числа (x, y, z) , така че $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD}$.

В частност, точката M принадлежи на вътрешността на паралелепипеда с определящи вектори $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ тогава и само тогава, когато $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$ и $z \in [0, 1]$ (при $x = 0, y = 0, z = 0, M \equiv A$; при $x = 1, y = 0, z = 0, M \equiv B$)

Моделиране на отношения на дължини, отношения на лица, отношения на обеми. В тази точка ще формулираме още три твърдения (теореме – T23, T24, T25), които осигуряват възможност за моделиране на отношения на дължини на колинеарни отсечки, отношения на лица на компланарни триъгълници (успоредници), отношения на обеми на тетраедри (паралелепипеди).

T23. Нека векторът $\vec{a}$ определя отсечка с дължина d и векторът $\vec{a}$ определя отсечка с дължина d_1 и $\vec{a} = \alpha \vec{a}$. Тогава $d_1 = |\alpha| d$.

T24. Нека двойката вектори $(\vec{a}, \vec{b})$ определя триъгълник с лице S и двойката вектори $(\vec{a}_1, \vec{b}_1)$ определя триъгълник с лице S_1 и

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \alpha_{11}\vec{a} + \alpha_{12}\vec{b} \\ \vec{b}_1 &= \alpha_{21}\vec{a} + \alpha_{22}\vec{b}\end{aligned}$$

Тогава $S_1 = |\Delta| S$, където Δ е детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$.

T25. Нека тройката вектори $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ определя тетраедър с обем V и тройката вектори $(\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1)$ определя тетраедър с обем V_1 и

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= \alpha_{11}\vec{a} + \alpha_{12}\vec{b} + \alpha_{13}\vec{c} \\ \vec{b}_1 &= \alpha_{21}\vec{a} + \alpha_{22}\vec{b} + \alpha_{23}\vec{c} \\ \vec{c}_1 &= \alpha_{31}\vec{a} + \alpha_{32}\vec{b} + \alpha_{33}\vec{c}\end{aligned}$$

Тогава $V_1 = |\Delta| V$, където Δ е детерминантата на матрицата $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$.

Векторно-алгебричното моделиране – съвременен подход в обучението по геометрия. Последователното изучаване и приложение на векторно-алгебричното моделиране в обучението по геометрия може да бъде направено с две основни цели. Първата цел се отнася до намиране на решението (доказателството) на вече поставена геометрична задача (теорема). Ако ученик (студент) не вижда геометрично (синтетично) решение, то той би могъл да моделира задачата (теоремата) с векторно-алгебрични средства, с което задачата (теоремата) от геометрична се преобразува във векторно-алгебрична. Обикновено при векторно-алгебричната задача (теорема) идеята за решението е „прозрачна“ и в този случай съставянето на план за решение не представлява трудност. Реализацията на плана се извършва с инструментариума на векторната алгебра. Понякога векторно-алгебричното решение е свързано със сложни преобразувания и затова е необходимо решаващият да има добра „векторна“ техника. Но усилията си заслужават, защото крайният резултат (решението или доказателството) е почти винаги гарантиран. Накрая векторно-алгебричният резултат се интерпретира в геометричен, с което решението (доказателството) е завършено.

Втората цел, в името на която векторно-алгебричното моделиране може да бъде използвано като евристичен подход, е свързана с откриване на нови (непознати досега) верни твърдения (теореме) в геометрията, т.е. с формулиране на хипотези и тяхната проверка. Още Кеплер е казал, че аналозите са най-добрите учители в геометрията. Но често пъти аналогията не е достатъчно ясно очертана. Например пространственият аналог на триъгълника в едни случаи е тетраедър (триъгълна пирамида), а в други случаи – триъгълна призма.

Векторното пространство, в чиято основа е векторната алгебра (и векторите са негови обекти), от математико-психологическа гледна точка осигурява почти очевиден преход от двумерното към тримерното и по естествен начин отваря „входа“ към n -мерното пространство. Естествено е закономерностите във векторната алгебра да се търсят по пътя на аналогията, преминавайки от обекти, „определени“ от два вектора (в двумерното пространство), да се преминава към обекти, „определени“ от три вектора (в тримерното пространство), след това към обекти, „определени“ от четири вектора (в четиримерното пространство) и т. н. С други думи, има основание да се предполага, че пътят на обобщението (или специализацията) във векторната алгебра е по-ясно очертан, отколкото в елементарната геометрия. Ето защо си струва при търсене на „точния“ аналог на геометричното понятие отначало да се намери неговият „векторно-алгебричен“ образ и след това да се търси аналог на образа.

Приложение. За да илюстрираме познавателните възможности на векторно-алгебричното моделиране и неговата евристична роля в обучението по геометрия,

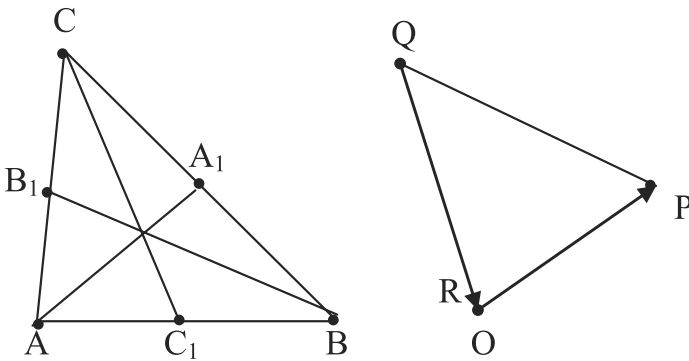
поместваме шест геометрични задачи и техните векторно-алгебрични решения. Задачите са обединени от понятията медиана и медицентър и засягат проблемни ситуации, свързани със съвпадане на точки, колинеарност и компланарност на точки и съотношения на лица на триъгълници и обеми на тетраедри. Първата група задачи се отнася за ситуации, независещи от размерността на пространството, а втората и третата групи описват ситуации в двумерното и тримерното пространство. Четири от задачите (с малки изменения) са взети от (Лалчев & Вутова, 2005) и (Лалчев & Вутова, 2009).

Първа група задачи

Задача 1. Да се докаже, че съществува триъгълник, чиито страни са съответно успоредни и равни на медианите на даден триъгълник.

Доказателство. Нека ABC е триъгълник с медиани AA_1 , BB_1 , CC_1 , (Фигура 1)

За да докажем, че съществува триъгълник, чиито страни са съответно успоредни и равни на медианите на $\triangle ABC$, е достатъчно да построим начупена линия $OPQR$, съставена от три отсечки (OP , PQ , QR), съответно успоредни и равни на медианите на $\triangle ABC$, за която началото (точката O) и крайт (точката R) съвпадат.



Фигура 1.

Нека O е произволна точка. Построяваме начупената линия $OPQR$, така че отсечката OP е успоредна и равна на медианата AA_1 , отсечката PQ е успоредна и равна на медианата BB_1 и отсечката QR е успоредна и равна на медианата CC_1 .

От построението следва, че

$$\vec{OP} = \vec{AA_1}, \vec{PQ} = \vec{BB_1} \text{ и } \vec{QR} = \vec{CC_1}.$$

Ще докажем, че точката R съвпада с точката O . За целта е достатъчно да докажем, че $\vec{OR}$ е нулев вектор. И действително:

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= \vec{OP} + \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{O}.\end{aligned}$$

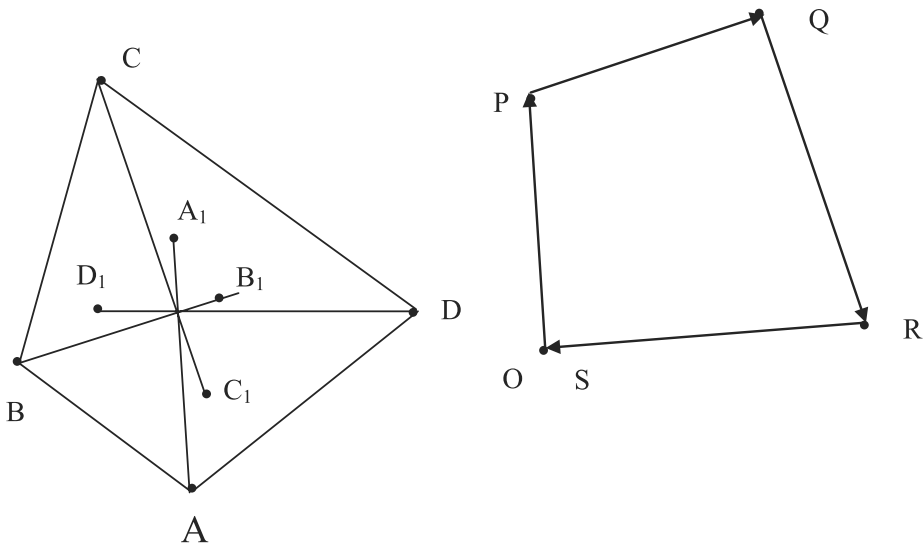
Следователно точката R съвпада с точката O. Последното означава, че начупената линия OPQR е затворена, т.е. OPQR е триъгълник.

Задача 2. Да се докаже, че съществува четириъгълник, чиито страни са съответно успоредни и равни на медианите на даден четириъгълник.

Доказателство. Нека ABCD е четириъгълник с медиани AA₁, BB₁, CC₁, DD₁ (Фигура 2).

За да докажем, че съществува четириъгълник, чиито страни са съответно успоредни и равни на медианите на четириъгълника ABCD, е достатъчно да построим начупена линия OPQRS, съставена от четири отсечки (OP, PQ, QR, RS), съответно успоредни и равни на медианите на ABCD, за която началото (точката O) и краят (точката S) съвпадат.

Нека O е произволна точка. Построяваме начупената линия OPQRS, така че отсечката OP е успоредна и равна на медианата AA₁, отсечката PQ е успоредна и равна на медианата BB₁, отсечката QR е успоредна и равна на медианата CC₁ и отсечката RS е успоредна и равна на медианата DD₁.



Фигура 2.

От построението следва, че

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{CC_1} \text{ и } \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{DD_1}$$

Ще докажем, че точката S съвпада с точката O. За целта е достатъчно да докажем, че $\overrightarrow{OS}$ е нулев вектор. И действително:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} = \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{O}. \end{aligned}$$

Следователно точката S съвпада с точката O. Следователно начупената линия OPQRS е затворена, т.е. OPQRS е четириъгълник.

Втора група задачи

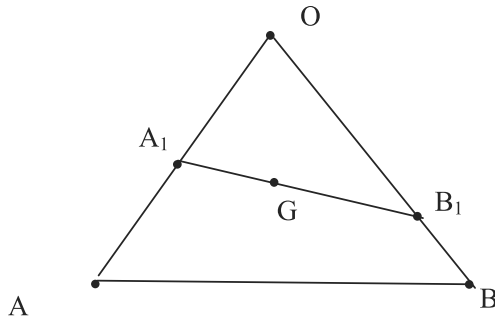
Задача 3. Точките A_1 и B_1 принадлежат съответно на страните OA и OB на триъгълника OAB с медицентър G. Известно е, че точките A_1 , B_1 и G лежат на една права. Да се докаже, че $\frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} = 3$.

Доказателство (Фигура 3)

От това, че G е точка от правата A_1B_1 , следва, че съществува двойка числа (α, β) така, че $\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA_1} + \beta\overrightarrow{OB_1}$ и $\alpha + \beta = 1$. (1)

Да въведем числа x ($x > 0$), y ($y > 0$), за които

$$OA_1 = xOA, \quad OB_1 = yOB.$$



Фигура 3.

От това, че G е медицентър на триъгълника OAB , следва:

$$\begin{aligned}\vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{GO} + \vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ 3\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{OB} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \vec{OG} &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}. \quad (2)\end{aligned}$$

Тъй като двойката вектори $(\vec{OA}, \vec{OB})$ образуват база в равнината, то от (1) и (2) следва:

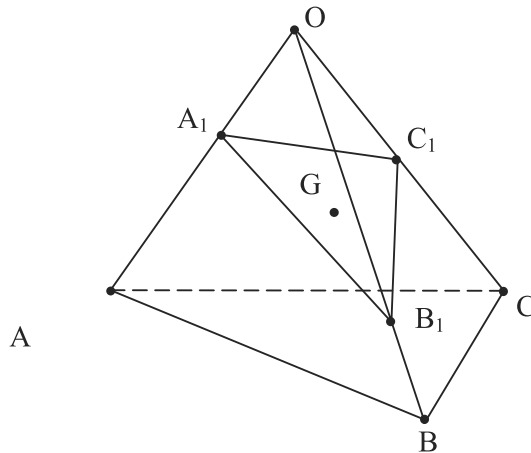
$$\frac{1}{3} = \alpha x \text{ и } \frac{1}{3} = \beta y, \text{ т.е. } \alpha = \frac{1}{3x} \text{ и } \beta = \frac{1}{3y}.$$

$$\text{Тъй като } \alpha + \beta = 1, \text{ то } \frac{1}{3x} + \frac{1}{3y} = 1, \text{ т.е. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

$$\text{Следователно } \frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} = 3.$$

Задача 4. Точките A_1, B_1 и C_1 принадлежат съответно на ръбовете OA, OB и OC на тетраедъра $OABC$ с медицентър G . Известно е, че точките A_1, B_1, C_1 и G лежат в една равнина. Да се докаже, че

$$\frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1} = 4.$$



Фигура 4.

Доказателство (Фигура 4)

От това, че G е точка от равнината $A_1B_1C_1$, следва, че съществува тройка числа (α, β, γ) така, че $\vec{OG} = \alpha\vec{OA_1} + \beta\vec{OB_1} + \gamma\vec{OC_1}$ и $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Да въведем числа x ($x > 0$), y ($y > 0$) и z ($z > 0$), за които $OA_1 = xOA$, $OB_1 = yOB$, $OC_1 = zOC$.

$$\text{Тогава } \vec{OG} = \alpha x \vec{OA} + \beta y \vec{OB} + \gamma z \vec{OC}. \quad (1)$$

От това, че G е медицентър на тетраедъра $OABC$, следва:

$$\begin{aligned} \vec{GO} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{O} \Leftrightarrow \\ \vec{GO} + \vec{GO} + \vec{OA} + \vec{GO} + \vec{OB} + \vec{GO} + \vec{OC} &= \vec{O} \Leftrightarrow \\ 4\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} &= \vec{O} \Leftrightarrow \\ \vec{OG} &= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OC}. \quad (2) \end{aligned}$$

Тъй като тройката вектори $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ образуват база в пространството, то от (1) и (2) следва:

$$\frac{1}{4} = \alpha x \text{ и } \frac{1}{4} = \beta y \text{ и } \frac{1}{4} = \gamma z, \text{ т.е. } \alpha = \frac{1}{4x} \text{ и } \beta = \frac{1}{4y} \text{ и } \gamma = \frac{1}{4z}.$$

$$\text{Тъй като } \alpha + \beta + \gamma = 1, \text{ то } \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} = 1, \text{ т.е. } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4.$$

$$\text{Следователно } \frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1} = 4.$$

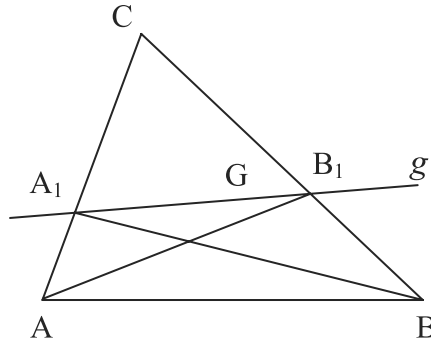
Трета група задачи

Задача 5. Нека ABC е триъгълник с медицентър G . Права, минаваща през точката G , пресича страните CA и CB в точките A_1 и B_1 . Да се докаже, че сборът от лицата на триъгълниците AA_1B_1 и BA_1B_1 е равен на лицето на триъгълник CA_1B_1 .

Доказателство (Фигура 5)

Да изберем за база двойката вектори $(\vec{CA}, \vec{CB})$ и да означим лицата на триъгълниците ABC , AA_1B_1 , BB_1A_1 , CA_1B_1 съответно с S , S_A , S_B , S_C . От това, че точката A_1 е от отсечката CA , следва, че съществува число α , така че: $\vec{CA_1} = \alpha\vec{CA}$ и $0 < \alpha < 1$.

От това, че точката B_1 е от отсечката CB , следва, че съществува число β , така че $\vec{CB_1} = \beta\vec{CB}$ и $0 < \beta < 1$.



Фигура 5.

Тогава за лицето на триъгълник CA_1B_1 получаваме:

$$S_C = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} S = \alpha\beta \cdot S.$$

Като вземем предвид, че

$$\vec{A_1A} = \vec{A_1C} + \vec{CA} = -\alpha \vec{CA} + \vec{CA} = (1-\alpha) \vec{CA} \text{ и}$$

$$\vec{A_1B_1} = \vec{A_1C} + \vec{C_1B} = -\alpha \vec{CA} + -\beta \vec{CB},$$

за лицето на триъгълник AA_1B_1 получаваме:

$$S_A = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & \beta \end{vmatrix} S = (1-\alpha)\beta \cdot S.$$

Като вземем предвид, че

$$\vec{B_1B} = \vec{B_1C} + \vec{CB} = -\beta \vec{CB} + \vec{CB} = (1-\beta) \vec{CB} \text{ и } \vec{B_1A_1} = \alpha \vec{CA} - \beta \vec{CB},$$

за лицето на триъгълник BB_1A_1 получаваме:

$$S_B = \begin{vmatrix} 0 & 1-\beta \\ \alpha & -\beta \end{vmatrix} S = \alpha(1-\beta) \cdot S.$$

От горните равенства следва, че: $S_A + S_B = (1-\alpha)\beta S + \alpha(1-\beta)S = (\alpha+\beta-2\alpha\beta)S$.

Точката G е медицентър на $\triangle ABC$. Тогава:

$$\vec{CG} = \frac{1}{3} \vec{CA} + \frac{1}{3} \vec{CB}. \quad (1)$$

Точката G е точка от правата A_1B_1 . Тогава има числа m и n , ($m + n = 1$), така че:

$$\overrightarrow{CG} = m\overrightarrow{CA_1} + n\overrightarrow{CB_1} \text{ т.е. } \overrightarrow{CG} = m\alpha\overrightarrow{CA} + n\beta\overrightarrow{CB} \quad (2)$$

От равенствата (1) и (2) следва, че:

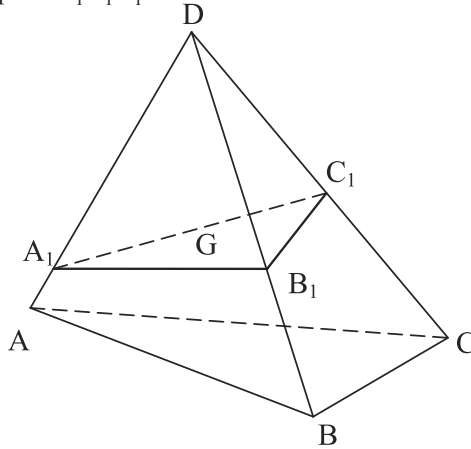
$$m\alpha = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } m = \frac{1}{3\alpha}, (\alpha \neq 0) \text{ и } n\beta = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } n = \frac{1}{3\beta}, (\beta \neq 0).$$

Като вземем предвид, че $m + n = 1$, получаваме: $\frac{1}{3\alpha} + \frac{1}{3\beta} = 1$, т.е. $\alpha + \beta = 3\alpha\beta$.

Тогава: $S_A + S_B = (\alpha + \beta - 2\alpha\beta)S = (3\alpha\beta - 2\alpha\beta)S = \alpha\beta S = S_C$.

С това задачата е решена.

Задача 6. Даден е тетраедър ABCD с медицентар G. Равнина, минаваща през точката G, пресича ръбовете DA, DB и DC съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Да се докаже, че сборът от обемите на тетраедрите $AA_1B_1C_1$, $BB_1C_1A_1$ и $CC_1A_1B_1$ е равен на обема на тетраедъра $DA_1B_1C_1$.



Фигура 6.

Доказателство (Фигура 6)

Да изберем за база тройката вектори $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$. От това, че точката G е медицентър на тетраедър ABCD, следва, че:

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OD}. \quad (1)$$

От това, че точката A_1 принадлежи на отсечката DA, следва, че съществува число α , така че $\overrightarrow{DA_1} = \alpha\overrightarrow{DA}$ и $0 < \alpha < 1$. (2)

Аналогично: $\overrightarrow{DB_I} = \beta \overrightarrow{DB}$, където $0 < \beta < 1$. (3)

Аналогично $\overrightarrow{DC_I} = \gamma \overrightarrow{DC}$, където $0 < \gamma < 1$. (4)

От това, че точката G принадлежи на вътрешността на $\Delta A_1B_1C_1$, следва, че съществуват числа x, y, z , така че:

$$\overrightarrow{DG} = x\overrightarrow{DA_I} + y\overrightarrow{DB_I} + z\overrightarrow{DC_I}, \text{ където } x + y + z = 1 \text{ и } 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1 \quad (5)$$

От условията (1), (2), (3), (4) и (5) следва, че:

$$\alpha x = \frac{1}{4}, \alpha y = \frac{1}{4}, \gamma z = \frac{1}{4}, (x + y + z = 1).$$

След изразяване на x, y и z от първите три равенства съответно и заместване в четвъртото равенство получаваме:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4\alpha\beta\gamma \quad (6)$$

Да означим обема на тетраедъра ABCD с V , а обемите на тетраедрите $AA_1B_1C_1$, $BB_1C_1A_1$, $CC_1A_1B_1$ и $DA_1B_1C_1$ съответно с V_A , V_B , V_C и V_D .

От векторните равенства:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA_I} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA_I} = (\alpha - 1) \overrightarrow{AD}, \\ \overrightarrow{AB_I} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB_I} = -\overrightarrow{DA} + \beta \overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{AC_I} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_I} = -\overrightarrow{DA} + \gamma \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

следва, че:

$$V_A = \left| \begin{vmatrix} \alpha - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \beta & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \end{vmatrix} \right| V = (1 - \alpha)\beta\gamma V.$$

По аналогичен начин установяваме, че:

$$V_B = \alpha(1 - \beta)\gamma V, V_C = \alpha\beta(1 - \gamma)V \text{ и } V_D = \alpha\beta\gamma V.$$

След като образуваме сбора на V_A , V_B и V_C и вземем предвид равенство (6), получаваме: $V_A + V_B + V_C = (\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta - 3\alpha\beta\gamma)V = \alpha\beta\gamma V = V_D$.

С това задачата е решена.

ЛИТЕРАТУРА

- Болтянский, В. Г. (1985). *Элементарная геометрия, книга для учителя*. Москва: „Просвещение“.
- Дьедоне, Ж. (1972). *Линейная алгебра и элементарная геометрия*. Москва: „Наука“.
- Лалчев, З. & Вутова, И. (2009). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от колинеарност и конкурентност*. София: „ВЕДА СЛОВЕНА“ – ЖГ.
- Лалчев З., Вутова, И. & Върбанова, М. (2005). *Векторно-алгебричен метод за решаване на геометрични задачи от лица и обеми*. София: „ВЕДА СЛОВЕНА“ – ЖГ.

THEORETICAL-PRACTICAL BASE OF VECTOR-ALGEBRAIC MODELING IN GEOMETRY EDUCATION

Abstract. The paper consists of two parts – theoretical and applied. In the theoretical part a selection and classification of the basic concepts (objects and relations) and statements (axioms and theorems) of Veil’s geometric system has been made, with the help of which a vector-algebraic modeling of concepts and statements from the Euclidean geometry could be established. Six geometric problems have been chosen and presented in the applied part. The problems are solved, using vector means. It is shown that in geometry education vector-algebraic modeling can be used not only for proving statements but as a heuristic possibility as well.

✉ **Irina Voutova, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University „St. Kliment Ohridski“
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria