

ТЕОРЕМА НА ВАН ОБЕЛ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Тодорка Глушкова, Боян Златанов

Резюме. Разгледани са приложения на Теоремата на Ван Обел за решаване на задачи по геометрия от училищния курс. Представена е и една авторска задача.

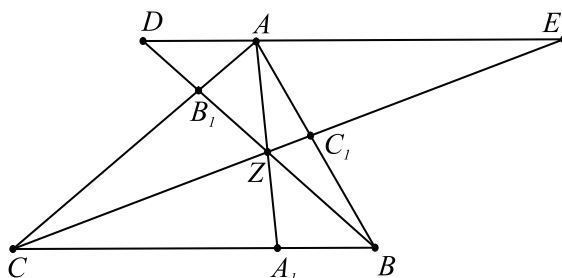
Keywords: Van Aubel's Theorem, Ceva's Theorem, Nagel Point, Gergonne point.

Теорема на Ван Обел. Нека са дадени $\triangle ABC$ и произволна точка Z от вътрешността на триъгълника. Ако правите AZ , BZ , CZ пресичат страните BC , AC , AB съответно в точките A_1 , B_1 , C_1 , то в сила са равенствата:

$$\frac{AZ}{ZA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}; \quad \frac{BZ}{ZB_1} = \frac{B_1A}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A}; \quad \frac{CZ}{ZC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1C}. \quad (1)$$

Съществуват различни доказателства на тази Теорема на Ван Обел, известна още като теорема на Ван Обел за триъгълника. Предлагаме едно доказателство, достъпно и за учениците от девети клас.

Да построим правата g , минаваща през върха A на $\triangle ABC$ и успоредна на страната му AB (черт.1). Въвеждаме точките: $D = g \cap BZ$, $E = g \cap CZ$.



Чертeж 1

От подобие на двойките триъгълници ADB_1 , CBB_1 и AEC_1 , BCC_1 следват съответно равенствата: $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{AD}{CB}$ и $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AE}{BC}$. Тогава

$$\frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AD}{BC} + \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{CB} = k. \quad (2)$$

Да разгледаме хомотетията ϕ с център Z и коефициент k . Тъй като $\phi(A, D, E) = A_1, B, C$, то

$$\frac{ZA}{ZA_1} = \frac{DE}{BC} = k. \quad (3)$$

От (2) и (3) следва първото равенство на (1). По аналогичен начин се доказва и верността на останалите две равенства в (1).

Теоремата на Ван Обел е силен инструмент за по-рационално решаване на голям обем от задачи.

Приложения на теоремата на Ван Обел.

В следващите разглеждания използваме стандартните означения: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Да започнем със случаи, когато точка Z съвпада с някои от добре познатите от училищния курс забележителни точки на $\triangle ABC$.

1) Ако $Z = M$ е медицентърът на $\triangle ABC$, то $\frac{AM}{MA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = 1 + 1 = 2$;

2) Ако $Z = I$ е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то $\frac{AI}{IA_1} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$.

Следващите приложения използват и Теоремата на Чева. За това ще я припомним.

Теорема на Чева: Нека е даден $\triangle ABC$ и точките A_1, B_1, C_1 , които са различни от върховете на триъгълника, лежат съответно на страните BC, AC, AB (чертеж 1). Правите AA_1, BB_1, CC_1 се пресичат в една точка тогава и само тогава,

когато е в сила равенството: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Прави, които удовлетворяват условието на теоремата на Чева, се наричат чевиани.

Третото приложение касае точката на Жергон.

Нека A_1, B_1, C_1 са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, със страните му AB, BC, CA (чертеж 2). Тогава отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в точка G , която се нарича **точка на Жергон**.

3) Ако $Z = G$ е точката на Жергон, то в сила са равенствата:

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}, \quad \frac{BG}{GB_1} = \frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}, \quad \frac{CG}{GC_1} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}.$$

Доказателство:

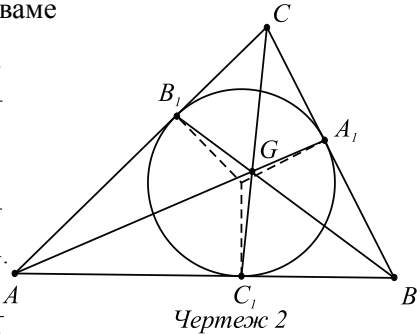
Съгласно познатите равенства $AC_1 = AB_1 = p - a$, $BC_1 = BA_1 = p - b$, $CA_1 = CB_1 = p - c$ и Теоремата на Чева, веднага заключаваме, че отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.

Прилагаме теоремата на Ван Обел и получаваме

$$\frac{AG}{GA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-a}{p-b} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{BG}{GB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p-b}{p-a} + \frac{p-b}{p-c} = \frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)}$$

$$\frac{CG}{GC_1} = \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-c}{p-b} = \frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$$



Четвъртото приложение касае точката на Нагел.

Нека A_1, B_1, C_1 са допирните точки на външно вписаните за $\triangle ABC$ окръжности, със страните му AB, BC, CA (чертеж 3). Тогава отсечките AA_1, BB_1 , и CC_1 се пресичат в точка N , която се нарича **точка на Нагел**.

4) Ако $Z = N$ е точката на Нагел, то в сила са равенствата:

$$\frac{AN}{NA_1} = \frac{a}{p-a}, \quad \frac{BN}{NB_1} = \frac{b}{p-b}, \quad \frac{CN}{NC_1} = \frac{c}{p-c}.$$

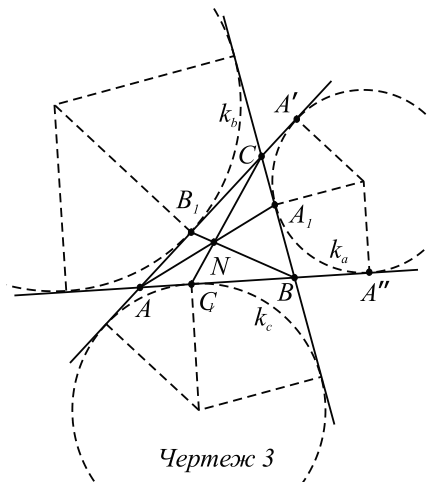
Доказателство: Нека k_a, k_b и k_c външно вписаните окръжности за $\triangle ABC$, допиращи се съответно да страните BC, AC и AB . (чертеж 3).

Нека да въведем означенията $A' = AC \cap k_a$, $A'' = AB \cap k_a$. Да положим $CA_1 = x$. Тогава $CA' = x$ и $BA_1 = BA' = a - x$. Прилагайки още веднъж за k_a свойството на допирателните от външна точка, записваме $AA' = AA''$, т.е. $b + x = c + a - x$, от където получаваме

$$CA_1 = CA' = x = p - b \text{ и}$$

$$BA_1 = BA'' = a - x = p - c.$$

Аналогично намираме $AB_1 = p - c$, $CB_1 = p - a$, $AC_1 = p - b$ и $BC_1 = p - a$. Прилагаме Теоремата на Чева и заключаваме, че AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка.



Прилагаме теоремата на Ван Обел и получаваме

$$\frac{AN}{NA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}$$

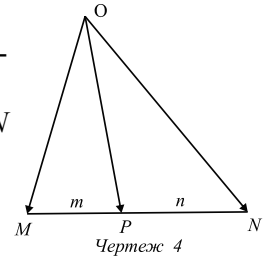
$$\frac{BN}{NB_1} = \frac{BA_1}{A_1C} + \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{p-c}{p-b} + \frac{p-a}{p-b} = \frac{b}{p-b}$$

$$\frac{CN}{NC_1} = \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{p-a}{p-c} + \frac{p-b}{p-c} = \frac{c}{p-c}.$$

Следващото приложение използва и добре известната теорема.

Теорема 3 Ако точката P дели вътрешно отсечката MN в съотношение $m:n$ и O е произволна точка (чертеж 4), то

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{m+n} (n\overrightarrow{OM} + m\overrightarrow{ON}).$$



Ще завършим настоящата статия с една авторска задача:

Задача Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ и точките M, N, K и L , които лежат съответно на страните му AB, BC, CD и DA и ги делят в отношение $m:n$. Ако $P = AN \cap CM, Q = BK \cap DN, R = AK \cap CL$ и $S = BL \cap DM$, то:

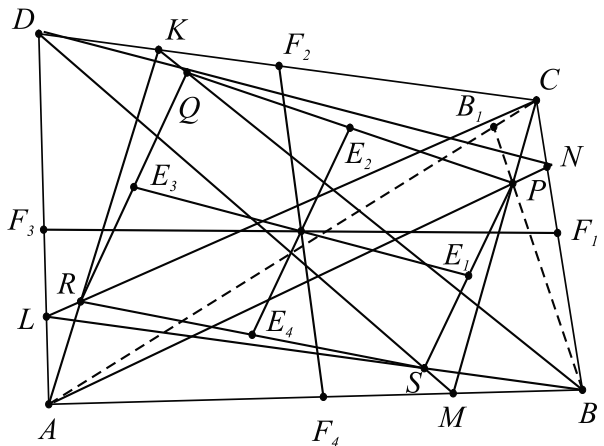
- средните отсечки на четириъгълниците $ABCD$ и $PQRS$ имат обща среда;
- правите, върху които лежат средните отсечки на четириъгълниците $ABCD$ и $PQRS$ са две тогава и само тогава, когато $m = n$.

Решение: Да означим средите на страните SP, PQ, QR и RS съответно с E_1, E_2, E_3 и E_4 , а средите на страните BC, CD, DA и AB съответно с F_1, F_2, F_3 и F_4 (чертеж 5) и $B_1 = AC \cap BP$.

а) Нека да приложим Теоремата на Чева за триъгълника ABC и чевианите през P .

$$\text{От } \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \text{ и условие-}$$

$$\text{то } \frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{m}{n} \text{ получаваме,}$$



Чертеж 5

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{MB}{AM} \cdot \frac{NC}{BN} = \frac{n^2}{m^2}. \text{ Сега прилагаме Теоремата на Ван Обел и установяваме}$$

$$\frac{CP}{PM} = \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CN}{NB} = \frac{n^2}{m^2} + \frac{n}{m} = \frac{n(n+m)}{m^2}.$$

Да изберем произволна точка O и приложим последователно Теорема 3 за отсечката CM и вътрешната ѝ точка P , за отсечката AB и вътрешната ѝ точка M . Така получаваме:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} (n(n+m).\overrightarrow{OM} + m^2.\overrightarrow{OC}) \text{ и } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{n+m} (n.\overrightarrow{OA} + m.\overrightarrow{OB}).$$

След заместване на $\overrightarrow{OM}$ в $\overrightarrow{OP}$ и някои преобразования, намираме следното представяне за вектора $\overrightarrow{OP}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} \left(\frac{n(n+m)n}{n+m} \overrightarrow{OA} + \frac{n(n+m)m}{n+m} \overrightarrow{OB} + m^2.\overrightarrow{OC} \right) \\ &= \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} (n^2.\overrightarrow{OA} + nm.\overrightarrow{OB} + m^2.\overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

След аналогични разглеждания за $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$ получаваме следните представяния за векторите:

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} (n^2.\overrightarrow{OB} + nm.\overrightarrow{OC} + m^2.\overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} (n^2.\overrightarrow{OC} + nm.\overrightarrow{OD} + m^2.\overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{m^2 + n^2 + m.n} (n^2.\overrightarrow{OD} + nm.\overrightarrow{OA} + m^2.\overrightarrow{OB})$$

Тъй като точките E_1 , E_2 , E_3 и E_4 са среди съответно на отсечките SP , PQ , QR и RS , то в сила са векторните равенства:

$$\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2(m^2 + n^2 + m.n)} [(n^2 + nm).\overrightarrow{OA} + (m^2 + nm).\overrightarrow{OB} + m^2.\overrightarrow{OC} + n^2.\overrightarrow{OD}]$$

$$\overrightarrow{OE_3} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{2(m^2 + n^2 + m.n)} [m^2.\overrightarrow{OA} + n^2.\overrightarrow{OB} + (n^2 + nm).\overrightarrow{OC} + (m^2 + nm).\overrightarrow{OD}]$$

$$\overrightarrow{OE_2} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2(m^2 + n^2 + m.n)} [n^2.\overrightarrow{OA} + (n^2 + nm).\overrightarrow{OB} + (m^2 + nm).\overrightarrow{OC} + m^2.\overrightarrow{OD}]$$

$$\overrightarrow{OE_4} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OR}) = \frac{1}{2(m^2 + n^2 + m.n)} [(m^2 + nm).\overrightarrow{OA} + m^2.\overrightarrow{OB} + n^2.\overrightarrow{OC} + (n^2 + nm).\overrightarrow{OD}].$$

Нека O_1 и O_2 са среди съответно на отсечките E_1E_2 и E_2E_4 . Тогава леко, с непосредствена проверка се установява верността на равенствата:

$$\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_3}) = \frac{(m^2 + n^2 + nm)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}{4(m^2 + n^2 + nm)} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OO_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_4}) = \frac{(m^2 + n^2 + nm)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}{4(m^2 + n^2 + nm)} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \quad (6)$$

Тъй като точките F_1, F_2, F_3 и F_4 са среди съответно на отсечките BC, CD, DA и AB , то

$$\overrightarrow{OF_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OF_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \overrightarrow{OF_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}), \overrightarrow{OF_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Нека O_3 и O_4 са среди на отсечките F_1F_3 и F_2F_4 . Тогава получаваме

$$\overrightarrow{OO_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF_1} + \overrightarrow{OF_3}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \quad (7)$$

и

$$\overrightarrow{OO_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OF_2} + \overrightarrow{OF_4}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \quad (8)$$

От равенствата (5), (6), (7) и (8) следва, че точките O_1, O_2, O_3, O_4 съвпадат, т.е. отсечките E_1E_3, E_2E_4, F_1F_3 и F_2F_4 имат обща среда.

б) Ще покажем, че точките E_1, E_3, F_2, F_4 лежат на една права, тогава и само тогава, когато $m = n$ (чертеж 6).

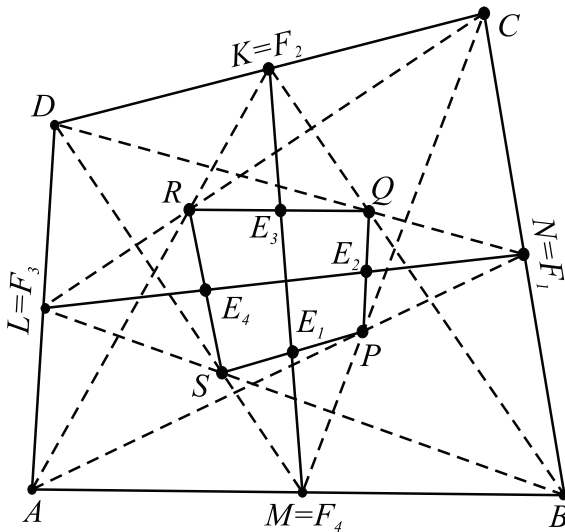
Наистина, в сила са равенствата

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_3E_1} &= \overrightarrow{OE_1} - \overrightarrow{OE_3} \\ &= \frac{(-m^2 + n^2 + nm)\overrightarrow{OA} + (m^2 - n^2 + nm)\overrightarrow{OB} + (m^2 - n^2 - nm)\overrightarrow{OC} + (-m^2 + n^2 - nm)\overrightarrow{OD}}{2(m^2 + n^2 + nm)} \quad (9) \\ &= \frac{(nm - m^2 + n^2)(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (nm + m^2 - n^2)(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})}{2(m^2 + n^2 + nm)}. \end{aligned}$$

и

$$\overrightarrow{F_2F_4} = \overrightarrow{OF_4} - \overrightarrow{OF_2} = \frac{(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})}{2}. \quad (10)$$

Можем да запишем (9) и (10) във вида $\overrightarrow{E_3E_1} = \frac{(nm - m^2 + n^2) \cdot \overrightarrow{CA} + (nm + m^2 - n^2) \cdot \overrightarrow{DB}}{2(m^2 + n^2 + n \cdot m)}$ и $\overrightarrow{F_2F_4} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}}{2}$. От факта, че средите на отсечките E_1E_3 и F_2F_4 съвпадат следва, че точките E_1, E_3, F_2, F_4 принадлежат на една права, тогава и само тогава, когато съществува $\lambda \neq 0$, така че $\overrightarrow{E_1E_3} = \lambda \overrightarrow{F_1F_3}$, което е еквивалентно на $nm - m^2 + n^2 = nm + m^2 - n^2$ или $n^2 - m^2 = (n + m)(n - m) = 0$, което може да бъде изпълнено само, ако $n = m$, защото по условие $n, m > 0$.



Чертеж 6

Проверката на верността на твърдението, че точките E_2, E_4, F_1, F_3 лежат на една права, тогава и само тогава, когато $m = n$, се провежда аналогично.

Повод за съставяне на нашата задача. бе изработването на динамичен чертеж с програмата CAM [1] на следната задача: В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ медицентровете на триъгълниците ABC, BCD, DAB, CDA определят четириъгълник $KLMN$. Да се докаже, че средните отсечки на $ABCD$ и $KLMN$ се пресичат в една точка. [2].

В посочения източник задачата се решава с векторния апарат.

Динамичният чертеж веднага показва, че четирите средни отсечки лежат върху две прави. Разбира се до това заключение би могло да се достигне и ако се открие, че двата четириъгълника са хомотетични.

ЛИТЕРАТУРА

Марков. Г., Златанов, Г., Грибачев, К. & Рангелова, П.. (1988). *Ръководство за решаване на задачи от училищния курс по геометрия*. Пловдив: ПУ "Паисий Хилендарски".

ДРУГИ ИЗТОЧНИЦИ

Златанов, Б., Караибрямов, С., & Царева, Б.. (2012). *Учебно помагало по синтетична геометрия*. <http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1180> или <http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=955>.

✉ Тодорка Глушкова

д-р
СОУ “Христо Смирненски”
4160 Брезово, ул. “Васил Коларов” N 1
България
E-mail: todorka.glushkova@gmail.com

✉ Боян Златанов

доцент, д-р
ПУ “Паисий Хилендарски”
Факултет по математика и информатика
4000 Пловдив, ул. “цар Асен” N 24
България
E-mail: bzlatanov@gmail.com

VAN AUBEL’S THEOREM AND APPLICATIONS

Abstract. Applications of Van Aubel’s theorem to solve problems of school geometry course are discussed in the paper. One authors’ task is presented.

✉ Todorka Glushkova

Ph.D.
“Hristo Smirnenski ” school
4160 Brezovo, 1 “Vasil Kolarov” str.
Bulgaria
E-mail: todorka.glushkova@gmail.com

✉ Boyan Zlatanov

Associate Professor, Ph.D.
Plovdiv University “Paisii Hilendarski”
Faculty of Mathematics and Informatics
4000 Plovdiv, 24 “tsar Assen” str.
Bulgaria
E-mail: bzlatanov@gmail.com