# СВЕЖДАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ И ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ДО МОДУЛНИ

**Пенка Рангелова**

**Резюме.** С разнообразни примери е показано свеждането на ирационални и трансцендентни уравнения и неравенства до модулни. Предложени са и задачи за самостоятелна работа.

*Keywords*: absolute value, equation, inequality, irrational, transcendental

Модулни уравнения от вида (1) $|f(x)| = g(x)$ или (1') $f(x) = |g(x)|$ са включени в програмата по математика за 9. клас. В Додунекова от 2001 (с. 77) в зависимост от сложността на функциите $f(x)$ и $g(x)$ решаването на уравненията (1) или (1') се свежда до обединение на решенията на системите

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{array} \right.$$

или до обединение на решенията на системите

$$\left| \begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = -g(x) \\ g(x) < 0 \end{array} \right. .$$

В Паскалев & Паскалева от 2001 (с. 61) уравнението (1) е сведено до решаване на уравненията $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$ и проверка кои от намерените корени удовлетворяват неравенството $g(x) \geq 0$. В Петкова & Петков от 2001 (с. 56) се разглеждат модулни уравнения с два и повече модула и е разгледан методът на интервалите за тяхното решаване, включително и за уравнения от вида (1).

Предлагаме следното разглеждане за уравнения от вида (1):

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ \left[f(x)\right]^2 = \left[g(x)\right]^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ \left[f(x) - g(x)\right].\left[f(x) + g(x)\right] = 0 \end{array} \right. .$$

Този подход ще следваме и при модулни неравенства. Когато уравнението съдържа няколко модула, например $|f(x)| \pm |g(x)| \pm |k(x)| = g(x)$, то дефиниционната област (ДО) се разделя на интервали чрез точките, които са корени на уравненията $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ и $k(x) = 0$ (Паскалев & Паскалева, 2001).

Модулното неравенство от вида (2) $|f(x)| > g(x)$ има за решения обединението от решения на $\begin{vmatrix} g(x) \geq 0 \\ [f(x)-g(x)].[f(x)+g(x)] > 0 \end{vmatrix}$ и $g(x) < 0$.

Модулното неравенство (3) $|f(x)| < g(x)$ има за решения решенията на системата $\begin{vmatrix} g(x) > 0 \\ [f(x)-g(x)].[f(x)+g(x)] < 0 \end{vmatrix}$.

Ще отбележим, че рационални и ирационални неравенства се разглеждат по програма в 10. клас. В учебниците на различните авторски колективи липсва методика за тяхното решаване. Първите ни разглеждания са свързани с решаване на определени видове уравнения, които се свеждат до модулни.

### I група. Ирационални уравнения, свеждащи се до модулни уравнения

В редица задачи в подкоренната величина се съдържа точен квадрат на двучлен или тричлен относно неизвестното. Коренуването на този точен квадрат води до модулно уравнение.

**Задача 1.** Решете уравнението $\sqrt{4x^2-4\sqrt{2}x+2} = x+1$.

*Решение*: Преработваме даденото уравнение и получаваме $\sqrt{\left(2x-\sqrt{2}\right)^2} = x+1$ $\Leftrightarrow$ $\left|2x-\sqrt{2}\right| = x+1$. Решенията на последното уравнение са решения на системата

$$\begin{vmatrix} x+1 \geq 0 \\ \left(2x-\sqrt{2}\right)^2 - (x+1)^2 = 0 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x \geq -1 \\ \left(3x+1-\sqrt{2}\right).\left(x-1-\sqrt{2}\right) = 0 \end{vmatrix}.$$

Корените на уравнението от системата са $x_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$ и $x_2 = \sqrt{2}+1$. Всеки от тях изпълнява условието $x \geq -1$. Следователно $x_1$ и $x_2$ са решения на задачата.

**Задача 2.** Решете уравнението $\sqrt{2x^2+2\sqrt{6}x+2\sqrt{10}x+2\sqrt{15}+8} = \sqrt{5}$.

*Решение*: Преработваме подкоренната величина и получаваме

$2x^2+2\sqrt{6}x+2\sqrt{10}x+2\sqrt{15}+5+3 = \left(\sqrt{2}x\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{6}x+2\sqrt{10}x+2\sqrt{15} =$
$= \left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2$. Следователно даденото уравнение приема вида

$\left|\sqrt{2}x+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}+2\sqrt{5}\right)=0 \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ и $x_2=-\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{10}}{2}$, които са решения на задачата.

**Задача 3.** Решете уравнението $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

*Решение*: За разлика от предходните две задачи сега подкоренните величини не са точни квадрати на многочлени по отношение на $x$. Забелязваме обаче, че изразът $\sqrt{2x-5}$ се повтаря. Полагаме $\sqrt{2x-5}=u\geq 0$ и определяме $x=\frac{u^2+5}{2}$. Даденото уравнение записваме във вида

$\sqrt{u^2+2u+1}+\sqrt{u^2+6u+9}=14 \Leftrightarrow |u+1|+|u+3|=14.$

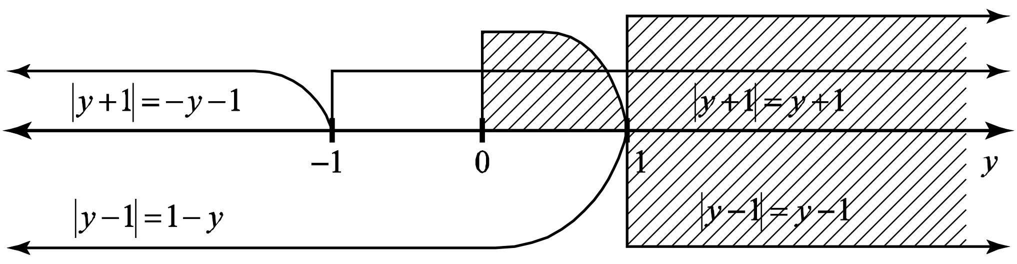
Понеже $u+1=0$ при $u=-1$, $u+3=0$ при $u=-3$ и $u\in[0;+\infty)$, то единственият интервал, в който разглеждаме уравнението, е $u\in[0;+\infty)$. В този интервал уравнението е $u+1+u+3=14 \Leftrightarrow 2u=10 \Leftrightarrow u=5$. Следователно $x=\frac{25+5}{2}=15$.

**Задача 4.** Решете уравнението $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

(Задачата е от Първата международна олимпиада по математика, проведена в Румъния през 1959 г.).

*Решение*: Както в задача 3, полагаме $\sqrt{2x-1}=y\geq 0$ и намираме $x=\frac{y^2+1}{2}$.

Даденото уравнение приема вида $\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+1}=2 \Leftrightarrow |y+1|+|y-1|=2$.




Ясно е, че ДО за $y$ се разделя на два интервала – $y\in[0;1)$ и $y\in[1;+\infty)$. При $y\in[0;1)$ уравнението е $y+1-y+1=2$. Следователно всяко $y\in[0;1)$ е решение. При $y\in[1;+\infty)$ уравнението е $2y=2 \Rightarrow y=1$. Всички числа $y\in[0;1)$ са решения на модулното уравнение. Тогава $0\leq\sqrt{2x-1}\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq 2x-1\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Следователно решенията на даденото уравнение са всички числа $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

**Задача 5.** Решете уравнението $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.
(Задачата е от областен кръг на олимпиада по математика, Бургас, 1997 г.)

*Решение*: Преработваме даденото уравнение и получаваме последователно

$\sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-6\sqrt{x-1}+9}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=1 \Leftrightarrow$ $\left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1$. Разглеждаме случаите:

**I случай.** Ако $\sqrt{x-1}\le 2$, т.е. $0\le x\le 5$, уравнението приема вида $2-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}+3=1 \Rightarrow x=5$.

**II случай.** Ако $\sqrt{x-1}\ge 3$, т.е. $x\ge 10$, уравнението може да се запише във вида $2\sqrt{x-1}-5=1$, откъдето намираме $x=10$.

**III случай.** Ако $2<\sqrt{x-1}<3$, т.е. $5<x<10$, уравнението е $\sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1$. В този случай всички числа $x\in(5;10)$ са решения на уравнението.

Решенията на задачата са $x\in[5;10]$.

## II група. Трансцендентни уравнения, които се свеждат до модулни уравнения

**Задача 6.** Решете уравнението $\log_3(x+1)^2=\frac{1}{2}\log_3(2x-3)^4$.

*Решение:* ДО: $x\ne -1$, $x\ne\frac{3}{2}$. Даденото уравнение записваме във вида $2\log_3|x+1|=2\log_3|2x-3|$, откъдето следва, че $|x+1|=|2x-3|$. Решенията на последното уравнение са решения на $(x+1+2x-3)(x+1-2x+3)=0$, откъдето получаваме $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=4$. Понеже и двете намерени числа са от ДО, те са решения на задачата.

Ще отбележим, че в много математически справочници се разглежда свойството $\log_a A^p=p\log_a A$ без ограничение за *А*. Напомняме: $\log_a A^p=p\log_a|A|$.

**Задача 7.** Решете уравнението $\log_2\sqrt{(1-x)^2}=3$.

*Решение*: ДО: $x\ne 1$. От определението за логаритъм следва $|1-x|=2^3$, откъдето $x_1=9$, $x_2=-7$. Понеже и двете числа са от ДО, то те са решения на задачата.

**Задача 8.** Решете уравнението $\log_{x-3}\sqrt{x^2-6x+9}=1$.

*Решение*: ДО: $x\in(3;4)\cup(4;+\infty)$. Даденото уравнение приема вида $\log_{x-3}|x-3|=1$, откъдето $x-3=|x-3|$. Последното заедно с ДО за $x$ води до уравнението $x-3=x-3$. Заключаваме, че всички $x\in(3;4)\cup(4;+\infty)$ са решения.

**Задача 9.** Решете уравнението $\log_5\left(x^4-4x^3+6x^2-4x+1\right)=4\log_5(x+7)$.

*Упътване.* Понеже $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x-1)^4$, то за $x\in(-7;1)\cup(1;+\infty)$ уравнението приема вида $|x-1|=x+7$. Търсеното решение е $x=-3$.

**Задача 10.** Решете уравнението $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(x^6-2x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

*Решение*: От даденото уравнение получаваме последователно $\sqrt{\left(x^3-1\right)^2}=1-x$ $\Leftrightarrow$ $\left|x^3-1\right|=1-x$. Решенията на последното уравнение са решения на системата $\left|\begin{array}{l}1-x\geq 0\\ \left(x^3+x-2\right)\left(x^3-x\right)=0\end{array}\right.$, откъдето намираме $x_1=x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=-1$.

## III група. Ирационални неравенства, свеждащи се до модулни

**Задача 11.** Решете неравенството:

а) $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 5$;

б) $\sqrt{1-6x+9x^2}\geq 3$.

*Упътване*. Неравенството е еквивалентно на:

а) $|x-3|\leq 5 \Rightarrow x\in[-2;8]$;

б) $|1-3x|\geq 3 \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$.

**Задача 12.** Решете неравенството $2\sqrt{x^2-4x+4}<x^2$.

*Упътване.* За $x\neq 0$ неравенството е еквивалентно на $\left(2x-4-x^2\right).\left(2x-4+x^2\right)<0$

$\Rightarrow\ x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};+\infty\right).$

**Задача 13.** Решете неравенството $\sqrt{x+8\left(3-\sqrt{x+8}\right)}<\frac{x+16}{2\sqrt{x+8}-10}$.

*Решение*: Полагаме $\sqrt{x+8}=y\geq 0$, определяме $x=y^2-8$ и записваме даденото неравенство във вида $|y-4|<\frac{y^2+8}{2y-10}$. Последното ще има решение при $\frac{y^2+8}{2y-10}>0$ $\Rightarrow\ y>5$. За тези стойности на $y$ следва, че $|y-4|=y-4$ и неравенството приема вида $y^2-18y+32<0$. Решенията на последното неравенство са $y\in(5;16)$, а $x\in(17;248)$.

**Задача 14.** Решете неравенството $\frac{\sqrt{4+x^2+4x}-\sqrt{4-4x+x^2}}{\sqrt{x^2+4+4x}+\sqrt{4+x^2-4x}}<1$.

*Упътване*. Неравенството приема вида $\frac{|2+x|-|2-x|}{|x+2|+|2-x|}<1\ \Leftrightarrow\ 2|2-x|>0$. Последното неравенство е вярно за всяко $x\neq 2$.

## IV група. Трансцендентни неравенства, които се свеждат до модулни неравенства

**Задача 15.** Решете неравенството:

а) $2\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}\left(4x^2+12x+9\right)<0$;

б) $\lg\left(x^2+\frac{1}{4}+x\right)>2\lg(x-3)$.

*Упътване*. а) За $x\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$ решете неравенството $|2x+3|<x+2$.

б) За $x>3$ неравенството приема вида $\left|x+\frac{1}{2}\right|>x-3$ и решенията на дадената задача са $x\in(3;+\infty)$.

**Задача 16.** Решете неравенството:

а) $\sqrt{1-2^x+2^{2x-2}}>2^{2x}-2^{x+2}+1$;

б) $0{,}6^{\left|\frac{x}{x-1}\right|}<0{,}6^x$.

*Решение*: а) Преработваме неравенството и получаваме последователно $\frac{1}{2}\sqrt{\left(2^x-2\right)^2}>\left(2^x-2\right)^2-3 \Leftrightarrow \frac{\left|2^x-2\right|}{2}>\left(2^x-2\right)^2-3$. Полагаме $\left|2^x-2\right|=u\geq 0$ и получаваме $2u^2-u-6<0$, откъдето $u\in\left[0;2\right)$, а $x<2$.

б) Трябва да решим неравенството $\left|\frac{x}{x-1}\right|>x$ с ДО $x\neq 1$. Неговите решения са решенията на $\left|\begin{array}{l} x\geq 0 \\ \left(\frac{x}{x-1}\right)^2-x^2>0 \end{array}\right. \cup\ x<0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x^3\left(2-x\right)>0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(0;1\right)\cup\left(1;2\right)$.

Решенията на дадената задача са $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;1\right)\cup\left(1;2\right)$.

С предложените подходи се решават следните задачи:

**Задача 17.** Решете уравнението:

а) $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}-}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$;

б) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$.

Отговори: а) $x\in\left[3\frac{1}{2};7\right]$; б) $x=5$.

**Задача 18.** Решете неравенствата:

а) $x+1>3\sqrt{x^2-4x+4}$;

б) $\log_{x+\frac{5}{2}}\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2>2$.

Отговори: а) $x\in\left(\frac{5}{4};\frac{7}{2}\right)$; б) $x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{21}+1}{4}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{21}-1}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{109}-3}{4}\right)$.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Додунеков, С. и др. (2001). *Математика за профилирана подготовка 9. клас.* София: Регалия 6.
2. Паскалев, Г. & Паскалева Здр. (2001). *Математика за 9. клас второ равнище*. София: Архимед.
3. Петкова, С. & Петков П. (2001*). Математика 9. клас профилирана подготовка*. София: Просвета.

4. Сивашинский, И. (1968). *Задачи по математике для внеклассных занятий*. Москва: Просвещение.
5. Сканави, М. (1988). *Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ*. Москва: Высшая школа.
6. Grozdev, S. *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE, 2007 (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

**Пенка Рангелова**
✉ доцент, доктор
Факултет по математика и информатика
Пловдивски университет „П. Хилендарски“
бул. „България“ № 236
4003 Пловдив, България
e-mail: rangelova_penka@abv.bg

## REDUCTION OF IRRATIONAL AND TRANSCENDENTAL EQUATIONS AND INEQUALITIES TO ABSOLUTE VALUE ONES

**Abstract.** Reduction of irrational and transcendental equations and inequalities to absolute value ones is considered by various examples. Some tasks for individual work are proposed too.

**Penka Rangelova**
✉ Associated Professor, PhD
Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University „Paisii Hiledarski“
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
e-mail: rangelova_penka@abv.bg