Educational Matters/
Въпроси на преподаването

СЪСТАВНИ АРИТМЕТИЧНИ ЗАДАЧИ. СТРУКТУРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕН МОДЕЛ И MZ-КАРТА НА ЗАДАЧАТА. ТЕКСТОВИ ЗАДАЧИ

[1]Здравко Лалчев, [2]Маргарита Върбанова
[1]Софийски университет „Св. Климент Охридски“
[2]Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Разработката е съсредоточена върху съставните аритметични задачи в началната училищна математика. Авторите се водят от разбирането, че съставната аритметична задача е композиция от свързани елементарни аритметични задачи. В тази връзка са въведени понятията структура и задача-компонента на съставна аритметична задача. Диалектическото единство на постановка и решение на аритметична задача е отразено в понятието структурно-технологичен модел на задачата в началната училищна математика. С цел графично представяне на модела при изучаване на задачата авторите предлагат дидактически подход, който е свързан с построяване на MZ-карта на задачата. С редица примери на съставни аритметични задачи е показана обяснителната роля на MZ-картата при разбиране и нейната евристична роля при търсене на идея за решанието на задачата. Разработката представлява продължение на изследването за аритметичните задачи.

Keywords: primary school mathematics, elementary and composite arithmetic problem, constructive and technological model, MZ-map, arithmetic transformation, inversion

1. Вместо въведение

Изследването е непосредствено продължение на разработки на авторите за структурата и класификацията на елементарните аритметични задачи и идейно продължение на статиите „Инверсията – метод на началната училищна математика“ и „Два подхода за изучаване на уравнения в началната училищна математика“, поместени в книжки 3 и 5 на списание „Математика и информатика“, 2014 година.

Добре известно е, че както в практиката, така и в теорията на обучението по математика в началните класове се изучават не само елементарни, но и съставни задачи. Нещо повече, в по-голямата си част задачите в курса по математика са съставни. Да не говорим за практическите (текстовите) задачи или за задачите, давани на математически конкурси и състезания. Съставните задачи в началната училищна математика са типичен пример за задачи, чиито решения са „многостъпкови“. Известно е още, че откриването на „стъпките“ при решаването на съставна задача представлява трудност за много ученици от началните класове. Това е основателна причина методиката на текстовите задачи в началната училищна математика да представлява особен интерес за специалистите по математическо образование.

2. За необходимостта от структурно-технологичен модел на задачата

Нашите наблюдения показват, че трудностите се проявяват осезаемо още при осъществяване на първия или втория от четирите етапа на решението на задачата (Пойа, 1972). Става дума за етапите на разбиране на задачата и съставяне план за нейното решение. Според специалистите по математическо образование в началните класове разбирането на задачата е свързано с преодоляване на „психологическата бариера“ между описаната ситуация в постановката на задачата и математическата абстракция на нейното решение или с прехода от математическия модел към конкретна негова интерпретация.

Учебната практиката показва, че помощните средства „съкратен запис“ и „графична схема“ често пъти се използват с обяснителна цел както при изграждане на математически модел на задачата, така и при нейната конкретизация. Независимо от „широката“ употреба на посочените средства при обучението в решаване на задачи, не е тайна, че в много случаи тяхната помощ е незадоволителна. Според нас основната причина за невисоката експликативна (обяснителна) стойност на посочените средства се крие в това, че тези средства („съкратен запис“ и „графична схема“) са твърде „общи“ и малко „функционални“. Моделите, построени на основата на използваните досега „съкратен запис“ или „графична схема“, не са достатъчно адекватни в по-сложни ситуации. Основната причина е, че не са представени важни обекти и съществени връзки от постановката на задачата. Затова можем да кажем, че моделите („съкратен запис“ и „графична схема“) са „бедни“ откъм съдържание и не отразяват същността на задачата, а само дават „схематична“ представа за нея.

Описаните обстоятелства и проблеми в обучението в решаване на задачи в началната училищна математика ни убеждават в необходимостта от **„междинен“** модел (между постановката и решението) на задачата, който да подпомага разбирането на задачата и да очертава „технологията“ на решението. На това място ще цитираме съветския учен П. Ердниев: „Короче говоря, под технологией обучения мы здесь понимаем материализацию дидактической идеи в предельно конкретных рекомендациях...“ (Эрдниев & Эрдниев, 1986: 187).

Теоретични проучвания и практически наблюдения оформиха хипотезата, че от една страна, идеята за **структура на задачата** се намира в основата на разбирането, а от друга – добре представената структура на задачата насочва мисълта към **технология на решението**. В тази връзка търсения междинен модел на задачата ще наречем **стуктурно-технологичен**.

Тъй като използвахме понятията *структура на задачата* и *технология на решението*, се чувстваме длъжни да внесем яснота по отношение на съдържанието, което влагаме в тях. Отначало ще направим справка в математико-методическата литература за значението на термина „структура на задача" на автори, изследвали същия или аналогичен на него методически проблем. Ще се позовем в хронологичен ред на трима автори.

В обучението по математика за понятието *структура на задачата* пише съветският учен Зинаида Ивановна Слепкан, цитирайки У. Рейтман: „В часности, английский ученый У. Рейтман в работе „Познание и мышление (моделирование на уровне информационных процесов)" (М., Мир, 1968) пишет: „Если мы пытаемся понять, как люди решают задачу каково либо вида, необходимо иметь хорошие представления о *структуре* решаемой задачи" (Слепкань, 1983).

В българската методическа литература понятието *структура на решението на задачата* е въведено от проф. Иван Ганчев през 80-те години на миналия век в посочената книга „За математическите задачи", предназначена за учители по математика от средния и горния курс, както и за студенти, готвещи се учители по математика. Идеята на автора е чрез разкриване на логическата структура на решението на задачата да се очертае необходимият съвременен логически апарат, който осигурява възможности за откриване на това решение, да се изследва как процесът на решаване зависи от структурата на решението. Съществено място в разработената методика заема нововъведеното тогава понятие *задача-компонента* (Ганчев, 1976), развито в редица публикации (Grozdev, 2007).

Понятието структура на текстова задача се интерпретира и използва в методически разработки по математика за началните класове от проф. А. Манова: „Следователно текстовите задачи се характеризират с *вътрешна* (*математическа*) и *външна* (*информационна*) *структура*, чиито елементи са условието, числовите данни и въпросът. Може да се открои и друга (трета) структура – *логическа*, чрез която се открива съответствието между даденото и търсеното. ...Вътрешната, или математическата структура на текстовата задача се дефинира като съчетание на дадено и търсено, разглеждани като компоненти на аритметичните операции, с помощта на които се намира отговорът на задачата. ...Познаването на математическата структура на задачата е много важно, тъй като от него зависи начинът на решаване" (Манова, 2011: 9).

Нашата концепция се отличава от посочените в съдържателен план. Ние разглеждаме **съставната аритметична задача като композиция от свързани елементарни аритметични задачи.** От тази гледна точка „добрият и полезен“ структурно-технологичен модел е „длъжен“ да отрази не толкова **математиката и логиката** на задачата сами за себе си, колкото да представи двете „съставки“ в единство и същевременно да очертае **елементарните задачи**, които изграждат съставната задача. Казано по друг начин, този модел извежда на преден план **структурата на елементарните задачи-компоненти**, съставящи главната задача. В този ред на мисли можем да кажем, че решението на задачата е процес на **конструиране (или идентифициране) на елементарните задачи и разкриване на мястото и начина на тяхното свързване** в структурата на съставната задача. Или структурно-технологичният модел очертава **не само задачите-компоненти**, но и тяхната **„сглобка“** в **„пъзела“** на съставната задача. Ако моделът „презентира“ адекватно структурата на задачата, то има голяма вероятност презентацията да провокира „инсайт“ за технологията на нейното решение.

3. MZ-картата – начин за представяне на структурно-технологичния модел на задачата

Следващите въпроси, на които трябва да се даде отговор, са въпросите за вида (формата) на междинния модел и принципите на неговото построяване. За да потърсим отговор на поставените въпроси, ще се обърнем към опита на класиците в областта на обучението в решаване на задачи.

Още древногръцките учени са формулирали ясно четири етапа, през които протича решението на задачата (геометрична задача за построение) – анализ, построение, доказателство, изследване. Американският математик и педагог Дьорд Пойа в своята книга „Как да се решава задача“ (Пойа, 1972) разширява и осъвременява модела на четирите етапа. Моделът на Пойа обхваща не само геометрични, а изобщо математически задачи. В него е отразена и психолого-педагогическата страна на решението на задачите. Етапите, през които минава решението на задачата (според Пойа), са: разбиране на задачата; търсене на плодотворна идея; провеждане на плана; проверка и изследване на решението (поглед назад). Моделът на Пойа за решаване на задачи е признат от видни специалисти по математическо образование и е намерил своето място в съвременните учебници по теория на обучението по математика за студентите – бъдещи учители.

Ако проектираме идеята за построяване на междинен модел на задачата върху класическия модел на Пойа, можем да кажем, че проекцията ще попадне върху първите два етапа – разбиране на задачата и търсене на плодотворна идея за решение. За да уточним формата на междинния модел на задачата, ще проследим част от разсъжденията на автора специално за тези етапи, като акцентираме на някои от тях: „Първо, ние трябва да *разберем* задачата; трябва ясно да виждаме какво се търси. Второ, трябва да видим как са *свързани различните елементи*, и по-специално как е *свързано неизвестното* с *данните*. Това ще ни помогне да си *съставим идея за решението*, да направим *план*. ...Може обаче да се случи на някой ученик да хрумне изключително „щастлива идея“ и той, като прескочи цялата предварителна подготовка, да стигне направо до решението. Такива щастливи идеи, разбира се, са желателни, но твърде нежелателно и неприятно е, когато ученикът пропусне някоя от четирите фази, без да има добра идея в главата си. ...Изобщо, съвсем безполезно е да се захващаме с подробностите, без да сме си изяснили *главните връзки* ...Ученикът трябва също да може да посочи главните части на задачата – *неизвестното, даденото и условието*. ...*Пътят* от разбирането на *постановката* на задачата до възникване на *идея за план* на решението може да се окаже дълъг и заплетен. Наистина, основното при решаването на една задача е да се стигне до идеята за *план*... Разбиране на задачата. *Какво мога да направя*? ...Разделете вашата задача на главни части. ...*неизвестното, данните и условието са главните части* на една „задача за намиране“. Проследете главните части на вашата задача, като разгледате една по една последователно и в различни комбинации и свържете всяка подробност с другите подробности и задачата като цяло. Търсене на плодотворна идея. *Откъде да започна*? Започнете от разглеждането на главните части на вашата задача. Започнете тогава, когато в резултат на предварителна работа сте осъзнали *връзката* между тях ...*Какво мога да направя*? Разгледайте задачата от различни страни и се опитайте да я *свържете* с вече придобитите знания. ...Подчертайте различните части, изучете различните подробности, изучете ги многократно, но по различен начин, комбинирайте подробностите по различни начини, подходете към тях от различни страни... Потърсете *допирни точки* с ваши по-рано придобити знания. ...Опитайте се да видите нещо познато в онова, което изучавате ...*Какво бих могъл да открия*? Плодотворна идея, а може би и решаваща идея, която веднага ще ви подскаже *пътя* към крайната цел. *В какво може да се състои плодотворността на една идея*? *Тя посочва целия път или част от него*, тя подсказва повече или по-малко ясно как трябва да действате“ (Пойа, 1972).

Когато четем тези текстове и се опитваме да определим кои са ключовите думи в тях, неволно си представяме ситуацията: авторът има пред себе се **пътна карта** и търси по нея **маршрут, свързващ пункта, в който се намира в момента, съответно с пункта, в който трябва да отиде**. Това впечатление поражда идея за съставяне на **математическа карта на задачата**, която по-конкретно ще наречем **MZ-карта**.

За да направим карта на задачата, е необходимо да уточним, от една страна, кои са основните **обекти**, които трябва да изобразим, и от друга – какви са **връзките** между тях, т.е. трябва ясно да си представим **структурата** на задачата. Разбира се, трябва да преценим и вида на „условните знаци“ – знаците, с които ще представим тази структура. Тъй като структурата на задачата е изградена от елементарни задачи, то е естествено графичните компоненти да отразяват елементарни задачи и връзките между тях. От статията за елементарните аритметични задачи е известно, че елементарните аритметични задачи могат да бъдат представени графично чрез диаграми от квадратчета и стрелки. При това диаграмите „диференцират“ задачите на различни типове: задачите от тип *операция* се представят чрез М-диаграми (сх. 1), а задачите от тип *релация* се представят чрез Z-диаграми (сх. 2).

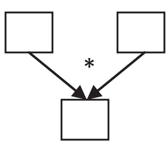


Схема 1

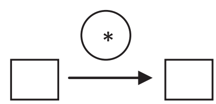
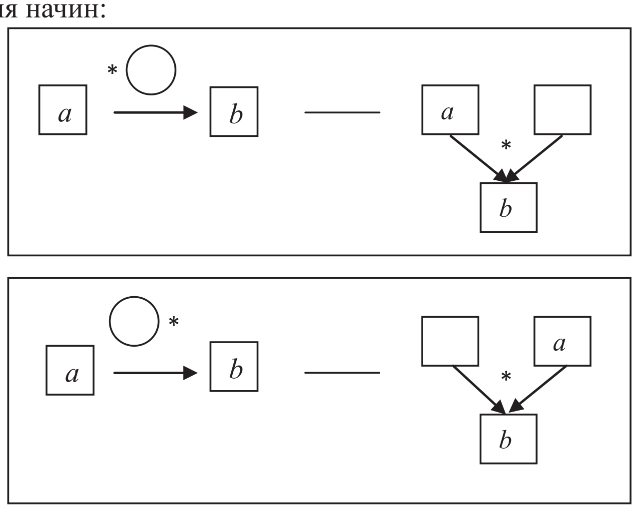


Схема 2

Както вече беше казано, двете диаграми са взаимно заменяеми. Например задачите от тип *релация*, при които неизвестното е в „релацията“, се „аритметизират“ по следния начин:



Ще направим още пояснения и във връзка с отговора на въпроса „Какво разбираме под **свързани елементарни задачи?“**. Две елементарни задачи са свързани тогава, когато едно от числата в числовите данни на задачите е свързващо (общо) и за двете задачи. Естествено е свързващото (общото) число за двете задачи на MZ-картата на главната задача да бъде представено с едно и също квадратче (например, както е показано на сх. 3).

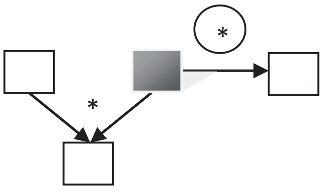


Схема 3

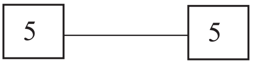


Схема 4

Често пъти при построяване на MZ-карта се налага дадено число да се използва на повече от едно място. Това може да стане, като съответното квадратче бъде „пренесено“ на подходящите места, а квадратчетата, предназначени за това число, се свързват с ненасочена линия (без стрелка). Постъпва се така, както е показано на сх. 4.

3. Някои типове съставни задачи в зависимост от техните MZ-карти

В зависимост от вида на задачите-компоненти (релация или операция) в състава на главната задача картите на задачите могат да се разделят на три типа: **Z-карта** (съставена само от Z-диаграми; **M-карта** (съставена само от M-диаграми); **MZ-карта** (съставена и от двата вида диаграми).

В зависимост от вида на задачите-компоненти (прави или обратни) в състава на решението на главната задача картите на задачите могат да се разделят на два типа: **карта без инверсии (обръщания)** и **карта с инверсии (обръщания).**

Ще представим по един пример от посочените по-горе типове.

3.1. Картата на задачата е съставена само от Z-диаграми

Разглеждаме примери на задачи, чиито карти са съставени само от Z-диаграми, свързани по правилото: „краят на едната е начало на следващата“. Това означава, че картата на задачата е линейна (верижна).

Следващата задача е пример на задача, чието решение не изисква вътрешни инверсии (обръщания), т.е. задачата е права.

Задача 1. Намислих числото 12. Умножих го по 3, полученото събрах с 14, полученото разделих на 5, полученото извадих от 100, полученото разделих на 9. Кое число съм получил?

Решение. 1. Анализ

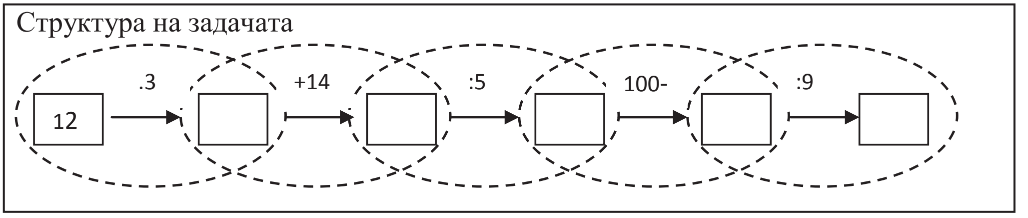


Схема 5

Построяваме MZ-карта на задачата, която представя структурата на задачата (сх. 5).

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) 12 . 3 = □; (2) □ + 14 = □; (3) □ : 5 = □; (4) 100 – □ = □; (5) □ : 9 = □.

За да решим главната задача, достатъчно е да намерим числото в последното квадратче на картата, т.е. в най-дясното квадратче (сх.5).

Едно празно квадратче може да бъде запълнено тогава, когато е компонент на елементарна задача, която е „определена“. С други думи, това е задача, на която две от квадратчетата са „запълнени“ и едно е празно, т.е. две от числата са известни и едно е неизвестно.

В случая последното квадратче е компонент на задача (5), която в този момент е „неопределена“, защото е известна само операцията. За да стане задача (5) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (4), която в този момент е също „неопределена“. За да стане задача (4) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (3), която в този момент е също „неопределена“. За да стане задача (3) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (2), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (2) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (1), която в този момент е „определена“ и може да бъде решена.

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задача 1), тъй като тази задача е „определена“ (12 . 3 = □) и може да бъде решена.

След като задача (1) бъде решена, т.е. бъде намерено произведението (36) на числата 12 и 3, то задача (2) става „опредена“ (36 + 14 = □) и може да бъде решена.

След като задача (2) бъде решена, т.е. бъде намерен сборът (50) на числата 36 и 14, то задача (3) става „определена“ (50 : 5 = □) и може да бъде решена.

След като задача (3) бъде решена, т.е. бъде намерено частното (10) на числата 50 и 5, то задача (4) става „определена“ (100 – 10 = □) и може да бъде решена.

След като задача (4) е решена, т.е. намерена е разликата (90) на числата 100 и 10, то задача (5) е вече „определена“ (90 : 9 = □) и може да бъде решена.

След като задача (5) бъде решена и е намерено частното (10) на числата 90 и 9, то и съставната задача е решена.

Отговор. Полученото число е 10.

На сх. 6 е показана картата на решението

Карта на решението

$$\boxed{12} \xrightarrow{.3} \boxed{\mathbf{36}} \xrightarrow{+14} \boxed{\mathbf{50}} \xrightarrow{:5} \boxed{\mathbf{10}} \xrightarrow{100-} \boxed{\mathbf{90}} \xrightarrow{:9} \boxed{\mathbf{10}}$$

Схема 6

Забележка. За краткост при излагане решението на главната (основната) задача ще записваме елементарните задачи по реда на тяхното решаване и след всяка задача-компонента ще записваме нейното решение. Решението на главната задача е съставено от решенията на задачите-компоненти в написания ред. Накратко, решението на главната задача може да бъде представено така:

1) Задача-компонента (1) 12 . 3 = □ (36);
2) Задача-компонента (2) 36 + 14 = □ (50);
3) Задача-компонента (3) 50 : 5 = □ (10);
4) Задача-компонента (4) 100 – 10 = □ (90);
5) Задача-компонента (5) 90 : 9 = □ (10).

Коментар. Главната (основната) задача е изградена от елементарни задачи от тип *релация* (аритметични преобразувания). Картата на задачата е линейна (верижна) диаграма, която е съставена само от свързани Z-диаграми. Задачите-компоненти се „нанасят“ в картата на задачата в ред, съответен на реда в текста на задачата. Решението на задачата се състои от решенията на задачите-компоненти, конструирани в посочения ред. За да се достигне до отговора на главната задача, е необходимо задачите-компоненти да се решат в същия ред, в който са открити. Всички елементарни задачи-компоненти са прави. „Стъпките“ на решението са еднопосочни и водят от началото към края на задачата. В решението на задачата няма вътрешни инверсии (обръщания). Отговорът на последната задача-компонента е отговор на главната задача.

На практика решението се състои в „попълването“ на картата чрез решаване на прави елементарни задачи-компоненти.

Математическият модел на задачата е аритметично уравнение от тип „формула“ (с неизвестно само от едната страна на равенството). Ако означим неизвестното с x, „формулата“ добива вида: Този модел е

$(100 - (((12.\,3) + 14) : 5)) : 9 = x$, $x = ?$

В случая неговото съставяне не е необходимо, тъй като картата показва достатъчно ясно „стъпките“ на решението.

Следващата задача е пример на задача, чието решение изисква вътрешни инверсии (обръщания), т.е задачата е обратна на задача 1.

Задача 2. Намислих едно число. Умножих го по 3, полученото събрах с 14, полученото разделих на 5, полученото извадих от 100, полученото разделих на 9. Получих 10. Кое число съм намислил?

Решение. 1. Анализ

Построяваме MZ-карта на задачата, която представя структурата на задачата (сх.7).

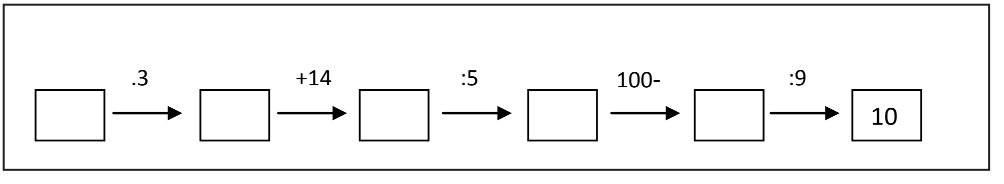


Схема 7

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) $\square\,.\,3 = \square$; (2) $\square + 14 = \square$; (3) $\square : 5 = \square$; (4) $100 - \square = \square$; (5) $\square : 9 = 10$.

За да се реши главната задача, достатъчно е да се намери числото в първото квадратче, което е най-ляво в картата. Както вече беше казано, празно квадратче може да бъде запълнено тогава, когато е компонент на елементарна „определена“ задача. Това означава, че две от квадратчетата са „запълнени“ и едно е празно, т.е. две от числата са известни и едно е неизвестно.

В случая първото квадратче е компонент на задача (1), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (1) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (2), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (2) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (3), която в този момент е „неопределена". За да стане задача (3) „определена", достатъчно е да бъде решена задача (4), която в този момент е „неопределена". За да стане задача (4) „определена", достатъчно е да бъде решена задача (5), която в този момент е „определена" и може да бъде решена.

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задача (5), тъй като тази задача е „определена" (□ : 9 = 10) и може да бъде решена.

След като задача (5) бъде решена, т.е. намерено е делимото (90) при делител 9 и частно 9, то задача (4) става „опредена" (100 – □ = 90) и същата може да бъде решена.

След като задача (4) бъде решена, т.е. намерен е умалителят (10) при умаляемо 100 и разлика 90, то задача (3) става „определена" (□ : 5 =10) и може да бъде решена.

След като задача (3) бъде решена, т.е. намерено е делимото (50) при делител 5 и частно 10, то задача (2) става „определена" (□ + 14 = 50) и същата може да бъде решена.

След като задача (2) е решена, т.е. намери се първото събираемо (36) при второ събираемо 14 и сбор 50, то задача (1) става „определена" (□ . 3 = 36) и може да бъде решена.

След като задача (1) бъде решена, т.е. бъде намерен първият множител (12) при втори множител 3 и произведение 36, то и съставната задача е решена.

Отговор. Намисленото число е 12.

На сх. 8 е показана картата на решението

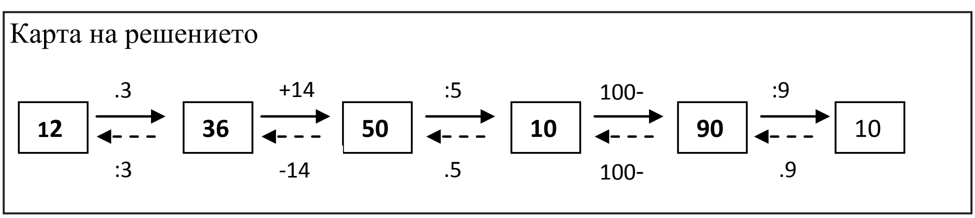


Схема 8

Забележка. Последователността от задачите-компоненти в решението на задачата е различна от последователността на задачите-компоненти в структурата на задачата. Решението на основната задача може кратко да бъде записано така:

1) Задача-компонента (5) □ : 9 = 10 (90);

2) Задача-компонента (4) 100 – □ = 90 (10);
3) Задача-компонента (3) □ : 5 = 10 (50);
4) Задача-компонента (2) □ + 14 = 50 (36);
5) Задача-компонента (1) □ . 3 = 36 (12).

Коментар. Главната задача е изградена от елементарни задачи от тип *релация* (аритметични преобразувания). Картата на задачата е линейна (верижна) диаграма, съставена само от свързани Z-диаграми. Задачите-компоненти се „нанасят" в картата на задачата в ред, който е еднакъв с реда на тяхното „появяване" в текста на задачата. Решението се състои от решенията на задачите-компоненти, конструирани в ред, обратен на задачите от структурата на задачата. За да се достигне до отговора на главната задача, е необходимо задачите-компоненти да се решат в обратен ред, т.е. в реда, обратен на реда на тяхното конструиране. Всички елементарни задачи-компоненти са обратни. „Стъпките" на решението са инверсни (обърнати) и водят от края към началото на задачата. В решението на задачата има вътрешни инверсии (обръщания). Отговорът на първата задача в списъка на задачите-компоненти е отговор на главната задача.

На практика, решението се състои в „попълване" на MZ-картата, изразено в последователно решаване на обратни елементарни задачи-компоненти.

Математическият модел на задачата е аритметично уравнение с неизвестно, което в случая означаваме с x. Този модел е

$(100 - (((x\ .\ 3) + 14) : 5)) : 9 = 10,\ \ x = ?$

В случая построяването на математическия модел не е необходимо, тъй като картата представя достатъчно ясно „технологията" на решението.

2. Картата на задачата е съставена само от М-диаграми

В тази точка ще разгледаме задачи, на които картите са съставени само от М-диаграми по правилото: „краищата на две задачи са началата на трета задача". (Това озаначава, че картата на задачата е стъпаловидна, пирамидална).

Следващата задача е представителен пример на задача, в чието решение не се налагат вътрешни инверсии (обръщания), т.е. задачата е права.

Задача 3. Дадени са числата 12, 36, 60, 4 и 66. От сбора на първите две е извадено частното на третото и четвъртото. Получената разлика е събрана с петото число. Кое число е получено?

Решение

1. Анализ

Построяваме MZ-карта на задачата, на която представяме структурата на задачата, (сх. 9).

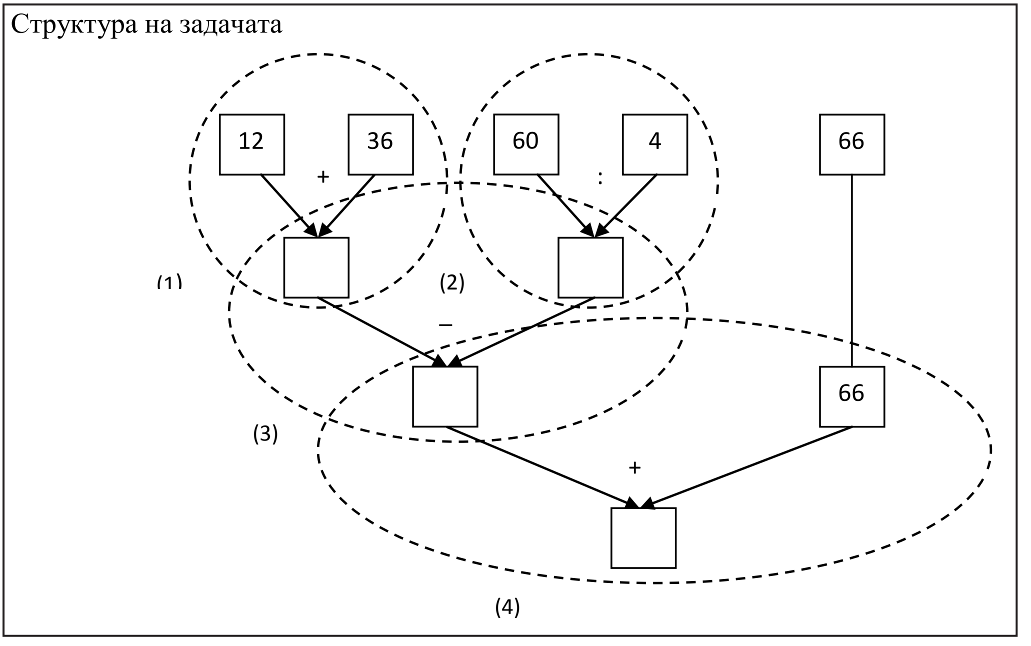


Схема 9

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) 12 + 36 = □; (2) 60 : 4 = □; (3) □ – □ = □; (4) □ + 66 = □.

За да решим главната задача, достатъчно е да намерим числото в последното квадратче (най-долното) в картата.

Вече беше казано, че празно квадратче може да бъде запълнено тогава, когато е компонент на „определена“ елементарна задача – две от квадратчетата са „запълнени“, а едното е празно.

В случая последното квадратче е компонент на задача (4), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (4) „определена“, достатъчно е да бъде решена задача (3), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (3) „определена“, необходимо е (и достатъчно) да бъдат решени задачи (1) и (2), които в този момент са „определени“ и могат да бъдат решени.

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задачи (1) и (2), тъй като тези задачи са „определени“ – (12 + 36 = □, 60 : 4 = □) и същите могат да бъдат решени.

След като задача (1) бъде решена, т.е. намерен е сборът (48) на числата 12 и 36, и задача (2) бъде решена – намерено е частното (15) на числата 60 и 4, задача (3) става „определена“ (36 + 14 = □) и същата може да бъде решена.

След като задача (2) бъде решена, т.е. намерен е сборът (50) на числата 36 и 14, то задача (3) става „определена“ (48 – 15 = □) и може да бъде решена.

След като задача (3) бъде решена, т.е. намерена е разликата (33) на числата 48 и 15, то задача (4) става „определена“ (33+ 66 = □) и може да бъде решена.

След като задача (4) бъде решена, т.е. бъде намерен е сборът (99) начислата 33 и 66, то и съставната задача е решена.

Отговор. Полученото число е 99.

На сх. 10 е показана картата на решението.

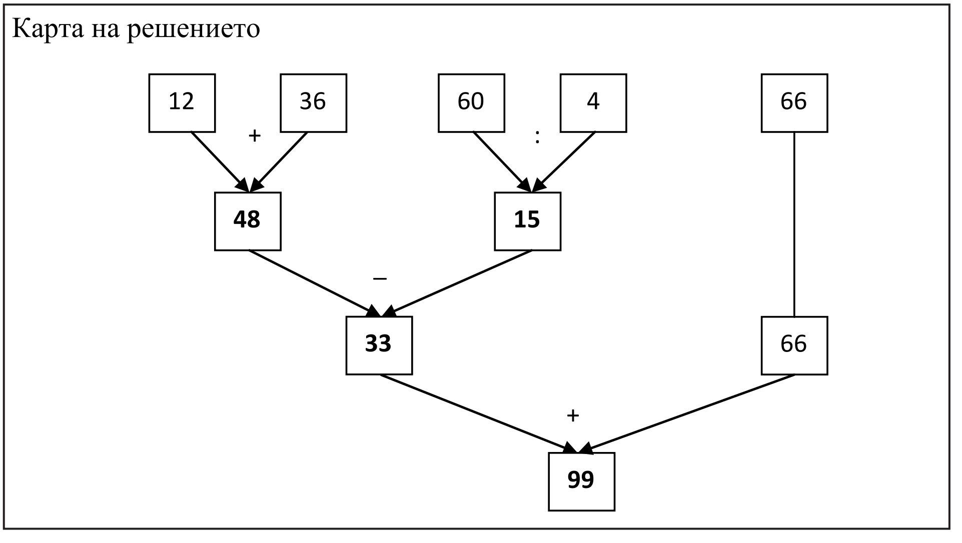


Схема 10

Накратко решението на разглежданата задача може да бъде записано така:

1) Задача-компонента (1) 12 + 36 = □ (48);

2) Задача-компонента (2) 60 : 4 = □ (15);

3) Задача-компонента (3) 48 – 15 = □ (33);

4) Задача-компонента (4) 33 + 66 = □ (99).

Коментар. Главната задача е изградена от елементарни задачи от тип *операция* (аритметични операции) и картата на задачата е стъпаловидна (пирамидална) диаграма, съставена само от свързани М-диаграми. Задачите-компоненти се

„нанасят“ в картата на задачата в реда на тяхното появяване в текста на задачата. Задачите (1) и (2) са независими и двете са разположени една след друга на два последователни реда („стъпала“) – в случая редовете са първи и втори на картата. Задача (3) е зависима от задачи (1) и (2) и затова е разположена на следващите два реда (втори и трети). Решението се състои от решенията на задачите-компоненти, построени в посочения ред. За да се достигне до отговора на главната задача, необходимо е задачите-компоненти да се решат в реда, определен в структурата на задачата. Всички елементарни задачи-компоненти са прави. „Стъпките“ на решението са еднопосочни и водят от началото към края на задачата. В решението на задачата няма вътрешни инверсии (обръщания). Отговорът на последната задача-компонента е отговорът на главната задача.

На практика, решението на задачата се състои в „попълване“ на MZ-картата на задачата чрез решаване на правите елементарни задачи-компоненти.

Математическият модел на задачата е равенство от тип „формула за неизвестното“, т.е. $((12 + 36) - (60 : 4)) + 66 = x, \quad x = ?$

Математическият модел представя „компактно“ математическата структура на задачата, но в случая неговото построяване не е необходимо, тъй като картата представя достатъчно ясно „процедурата“ на решението.

Следващата задача е представителен пример на задача, в чието решение се налагат вътрешни инверсии (обръщания), т.е. задачата е обратна.

Задача 4. Дадени са пет числа, от които първото е неизвестно, а останалите са 36, 60, 4, 66. От сбора на първите две е извадено частното на третото и четвъртото число. Сборът на получената разлика с петото число е 99. Кое е първото число?

Решение. 1. Анализ

Построяваме MZ-карта на задачата, на която представяме структурата на задачата, (сх.11).

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) $\square + 36 = \square$; (2) $60 : 4 = \square$; (3) $\square - \square = \square$; (4) $\square + 66 = 99$.

За да решим главната задача, достатъчно е да намерим числото в първото квадратче в картата.

В случая първото квадратче е компонент на задача (1), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (1) „определена“, достатъчно е да бъдат решени задача (2) и задача (3). Задача (2) е „определена“ и може да бъде решена. Задача (3) в този момент е „неопределена“. За да стане задача (3) „определена“, е необходимо (и достатъчно) да бъдат решени задачи (2) и (4), които в този момент са „определени“ и могат да бъдат решени.

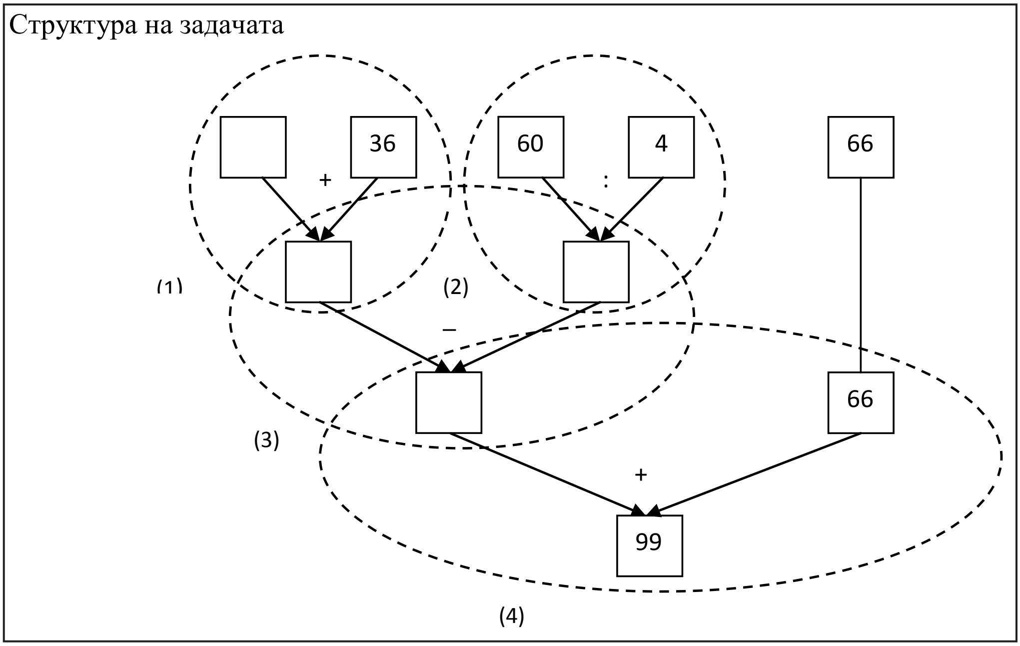


Схема 11

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задачи (2) и (4), тъй като тези задачи са „определени“ (60 : 4 = □, □ + 66 = 99) и могат да бъдат решени. (Задача (2) е права, а задача (4) е обратна.)

След като задача (2) бъде решена, т.е. намерено е частното (15) на числата 60 и 4, и задача (4) бъде решена, т.е. намерено е първото събираемо (33) при второ събираемо 66 и сбор 99, то задача (3) става „опредена“ (□ – 15 = 33) и може да бъде решена.

След като задача (3) бъде решена, т.е. намерено е умаляемото (48) при умалител 15 и разлика 33, то задача (1) става „определена“ (□ + 36 = 48) и може да бъде решена.

След като задача (1) бъде решена, т.е. намерено е първото събираемо при второ събираемо 36 и сбор 48, то и съставната задача е решена.

Отговор. Неизвестното число е 12.

На сх. 12 е показана картата на решението

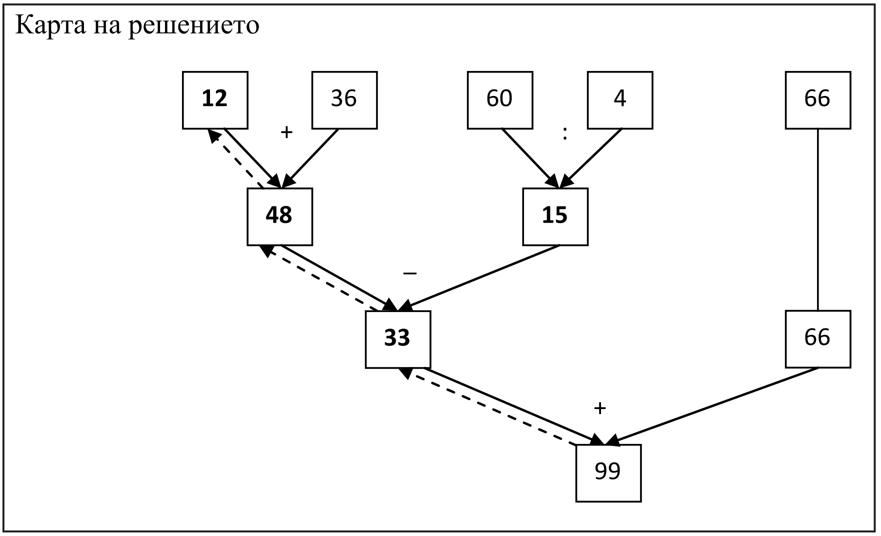


Схема 12

Последователността от задачите-компоненти в решението на задачата е различна от последователността на задачите-компоненти в структурата на задачата.

Структурата на решението на задачата може да бъде записана накратко така:

1) Задача-компонента (2) $60 : 4 = \square$ (15);

2) Задача-компонента (4) $\square + 66 = 99$ (33);

3) Задача-компонента (3) $\square - 15 = 33$ (48);

4) Задача-компонента (1) $\square + 36 = 48$ (12).

Коментар. Главната задача е изградена от елементарни задачи от тип *операция* (аритметични операции) и картата на задачата е линейна (верижна) диаграма, съставена само от свързани Z-диаграми. Задачите-компоненти се „нанасят“ в картата на задачата в реда на тяхното „появяване“ в текста на задачата. От елементарните задачи-компоненти има прави (Задача (2) и обратни (Задача (4), Задача (3) и Задача (1)).

На практика решението се състои в „попълването“ на MZ-картата чрез решаване както на прави, така и на обратни елементарни задачи-компоненти.

Математическият модел на задачата е аритметично уравнение:

$((x + 36) - (60 : 4)) + 66 = 99$, $x = ?$

Математическият модел представя „компактно“ математическата структура на задачата, но в случая построяването му не е необходимо, тъй като картата представя достатъчно ясно „процедурата“ на решението.

3.3. Картата е съставена и от двата типа диаграми (М-диаграми и Z-диаграми)

Ще разгледаме представителни примери на задачи, на които картите са композиции от М-диаграми и Z-диаграми.

Следващата задача е пример на задача от учебното съдържание за четвърти клас, в чието решение не се налагат вътрешни инверсии (обръщания), т.е. задачата е композиция от прави задачи.

Задача 5. В зимните състезания от училището на Димитър участваха 19 ученици с кънки и 5 пъти повече ученици с шейни. Учениците със ски бяха с 67 по-малко от тези с шейни. Всичко колко ученици участваха в състезанията?

Решение. 1. Анализ

Построяваме MZ-карта на задачата, на която представяме структурата на задачата (сх.13). (Предложената карта е една от възможните.)

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) 19 . 5 = □; (2) □ – 67 = □; (3) 19 +□ = □; (4) □ + □ = □.

За да решим главната задача, достатъчно е да намерим числото в последното квадратче (най-долното) в картата.

Както е добре известно, празно квадратче може да бъде запълнено тогава, когато е компонент на елементарна „определена“ задача. В случая последното квадратче е компонент на задача (4), която в този момент е „неопределена“. За да стане задача (4) „определена“, необходимо (и достатъчно) е да бъдат решени задача (2) и задача (3), които в този момент са „неопределени“. За да станат задача (2) и задача (3) „определени“, необходимо (и достатъчно) е да бъде решена задача (1), която в този момент е „определена“ и може да бъде решена.

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задача (1), тъй като тази задача е „определена“ (19 . 5 = □) и може да бъде решена. (Задача (1) е права.)

След като задача (1) бъде решена, т.е. намерено е произведението (95) на числата 19 и 5, задачите (2) и (3) стават „опредени“ (95 – 67 = □, 19 + 95 = □) и е възможно тяхното решение. (Задачите (2) и (3) са прави.)

След като задача (2) бъде решена и е намерена разликата (28) на числата 95 и 67, а също и задача (3) бъде решена, т.е. намерен е сборът (114) на числата 19 и 95, то задача (4) става „определена“ (114+28 = □) и може да бъде решена.

След като задача (4) бъде решена и е намерен сборът (142) на числата 114 и 28, то и съставната задача е решена. (Задача (4) е права.)

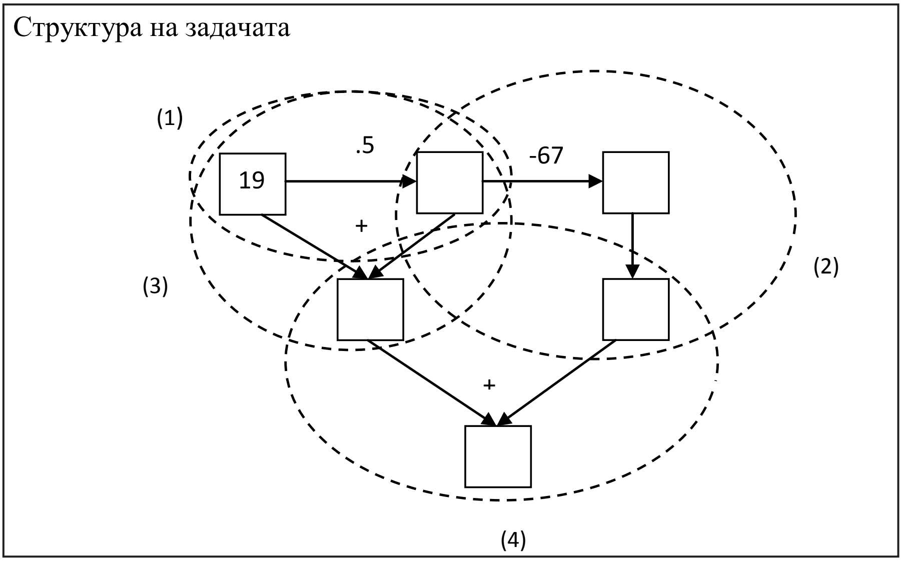


Схема 13

Отговор. Броят на всички участници е 142.
На сх. 14 е показана картата на решението.
Структурата на решението на задачата може да бъде записана така:
1) Задача-компонента (1) 19 . 5 = □ (95);
2) Задача-компонента (2) 95 – 67 = □ (28);
3) Задача-компонента (3) 19 + 95 = □ (114);
4) Задача-компонента (4) 114 + 36 = □ (142).

Структурата на решението на задачата може да бъде записана така:
1) Задача-компонента (1) 19 . 5 = □ (95);

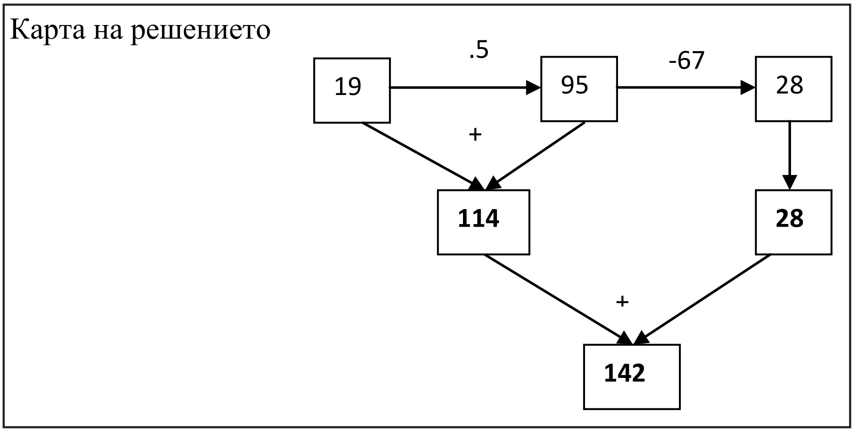


Схема 14

Коментар. Главната задача е изградена от елементарни задачи от тип *операция* (аритметични операции) и елементарни задачи от тип *релация* и картата на задачата е съставена от свързани M и Z-диаграми. Задачите-компоненти се „нанасят“ в картата на задачата в реда на тяхното появяване в текста на задачата. Решението се състои от решенията на задачите-компоненти, конструирани в посочения ред. Всички елементарни задачи-компоненти са прави. „Стъпките“ на решението са еднопосочни и водят от началото към края на задачата. В решението на задачата няма вътрешни инверсии (обръщания). Отговорът на последната задача-компонента е отговор на главната задача.

Решението на задачата се състои в „попълването“ на MZ-картата чрез решаване на прави елементарни задачи-компоненти.

Математическият модел на задачата е равенство от тип „формула за неизвестното“, т.е. $(19 + (19 . 5)) + ((19 . 5) – 67) = x$, $x = ?$

Както при предходните задачи, математическият модел представя „компактно“ математическата структура на задачата, но не е необходимо построяването му, тъй като картата представя достатъчно ясно „процедурата“ на решението.

Задача 6. В зимните състезания от училището на Димитър участваха 19 ученици с кънки. Учениците с кънки бяха 5 пъти по-малко от учениците с шейни, а учениците с шейни бяха с 67 повече от учениците със ски. Колко ученици всичко участваха в състезанията?

Решение. 1. Анализ

Построяваме MZ-карта на задачата, която представя структурата на задачата (сх.15). (Тази карта е една от възможните.)

Отделяме елементарните задачи-компоненти на съставната задача:

(1) □ : 5 = 19; (2) □ + 67 = □; (3) 19 + □ = □; (4) □ + □ = □.

За да решим главната задача, достатъчно е да намерим числото в последното квадратче (най-долното) в картата. Подходът на решението е аналогичен на подхода при задача 5.

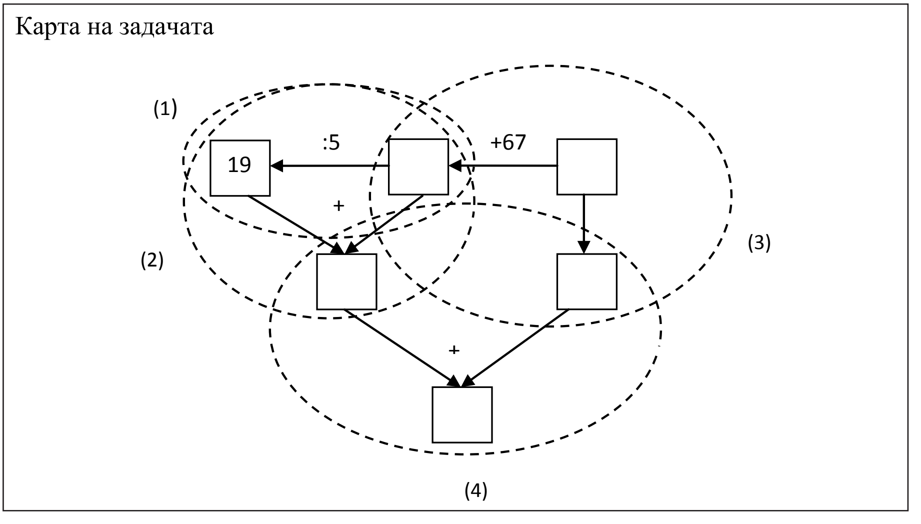


Схема 15

2. Синтез

Анализът на картата показва, че решението на главната задача започва от задача (1), която е „определена“ и (2) и (3) стават „определени“ (□+ 67 = 95, 19 + 95 = □), и могат да бъдат решени. (Задача (2) е обратна, задача (3) е права.)

След решението на двете задачи (Задача (2) и Задача (3)), задача (4) става „определена“ (114 +28 = □) и може да бъде решена. Задача (4) е права)

След като задача (4) бъде решена, т.е. намерен е сборът (142) на числата 114 и 28, то е решена и съставната задача.

Отговор. Броят на всички участници е 142.

На сх. 16 е показана картата на решението.

Накратко, структурата на решението на задачата може да бъде записана така:

1) Задача-компонента (1) □ : 5 = 19 (95);
2) Задача-компонента (2) □ + 67 = 95 (28);
3) Задача-компонента (3) 19 + 95 = □ (114);
4) Задача-компонента (4) 114 + 28 = □ (142).

Коментар. Главната задача е изградена от елементарни задачи от тип *операция* и елементарни задачи от тип *релация*. Картата на задачата е съставена от свързани M- и Z-диаграми. В решението на задачата има две вътрешни инверсии (обръщания). Отговорът на последната задача-компонента е отговор на главната задача.

Всъщност решението на задача 6 се състои в „попълване" на MZ-картата чрез решаване както на обратни, така и на прави задачи-компоненти.

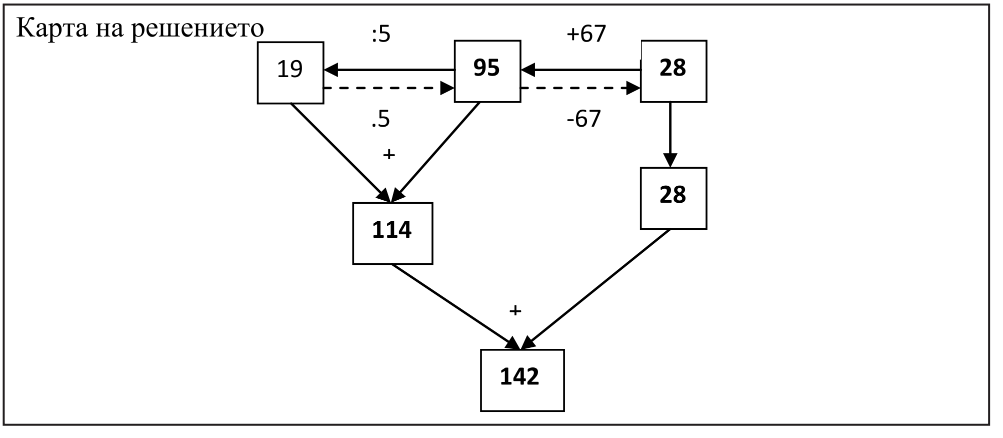


Схема 16

Забележка. Тъй като в задачата има „вътрешни" инверсии (обръщания), то не е възможно ситуацията да бъде моделирана с един числов израз. Ето защо при съставяне на математическия модел на задачата е необходимо обратните задачи (в случая задача (1) и задача (2)) да бъдат заменени с прави задачи, еквивалентни на тях. В случая заместваме задача (1) със задачата 19 . 5 = □ (1*) и заместваме задача (2) със задачата 95 – 67 = □ (2*). Така получаваме математически модел: $(19 + (19 . 5)) + ((19 . 5) – 67) = x, \quad x = ?$

Ако сравним математическите модели на задача 5 и задача 6, се вижда, че тези модели са тъждествени, т.е. двете задачи са математически еквивалентни. Но от логическа гледна точка задачите не са еквивалентни. Това показва, че структурно-технологичният модел на задачата е по-общ от математическия модел. Може да се каже, че той представя аритметична технология на решението и в случаите, при които не съществува аритметична „формула“ за намиране на неизвестното.

4. Моделиране на често срещани практически проблемни ситуации

В тази част на разработката ще представим MZ-картите на практически задачи, свързани с образите и първообразите на двойка числа, „подложени“ на едно и също аритметично преобразуване.

4.1. Карта на задача за „преместване“

Преместване наричаме аритметичното „действие“, реализирано от преобразуванието *събиране на* $(+a)$ или от преобразуванието *изваждане на* $(–a)$. Известно е, че обратното преобразуване на *събиране на* $(+a)$ е *изваждане на* $(–a)$ и обратното преобразуване на *изваждане на* $(–a)$ е *събиране на* $(+a)$. Тъй като преобразуванията *събиране на* $(+a)$ и *изваждане на* $(–a)$ взаимно се „допълват“, то *преместването* е „обратимо“ действие, т.е. обратното „действие“ на „преместване“ е „преместване“.

Следващата теорема изразява характеристично **свойство на аритметичното преместване**.

Теорема. Нека A и B са две числа и числото B е **с *k* по-голямо (по-малко)** от числото A. Нека $(+a)$ е преместване на a и числата M и N са образи съответно на A и B. Тогава числото N е **с *k* по-голямо (по-малко)** от числото M .

Действително.

Нека $M = A + a$ и $N = B + a$. От $B = A + k$ следва, че

$N = (A + k) + a = (A + a) + k = M + k$, т.е. $N = M + k$.

Теоремата е в сила и за преместването $(– a)$.

Вярно е и обратното твърдение.

Видът на MZ-картата на теоремата е представен на схема 17.

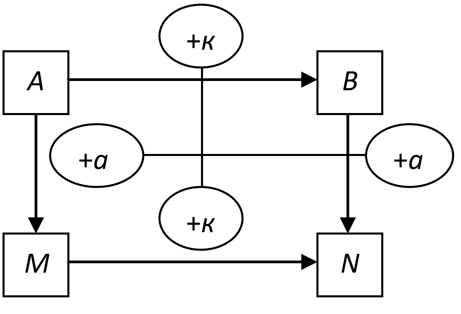


Схема 17

Доказаното свойство на преместването дава възможност релацията между числата-първообрази да се „пренася“ в релация между числата-образи и обратно. Това свойство позволява задачата да бъде решена, без да бъде използвана числената стойност на преместването. С други думи, задачата може да бъде решена по два начина.

Задача 7. Бащата е на 67 години, а дъщерята е на 39 години. На колко години е бил бащата, когато дъщерята е била на 13 години? (Задачата да се реши по два начина.)

Решение

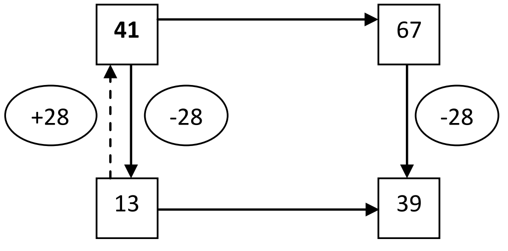


Схема 18

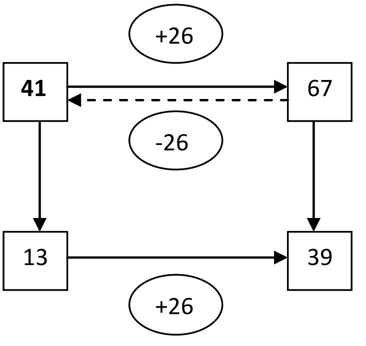


Схема 19

За всеки от двата начина на решение построяваме MZ-картата на задачата, на която представяме структурата на задачата и структурата на решението (сх. 18 и сх. 19).

Отговор. Бащата е бил на 41 години.

4.2. Карта на задача за адитивно допълване

Допълване (адитивно допълване) наричаме аритметичното „действие“, реализирано от преобразуванието *изваждане от* (*a*–). Известно е, че обратното преобразуване на *изваждане от* (*a*–) е *изваждане от* (*a*–). Тъй като преобразуванията *изваждане от* (*a*–) и *изваждане от* (*a*–) взаимно се „допълват“, то *допълването* е „обратимо“ действие, т.е. обратното „действие“ на допълването е допълване.

Следващата теорема изразява характеристично **свойство на адитивното допълване**.

Теорема. Нека A и B две числа и числото B е **с *k* по-голямо (по-малко)** от числото A. Нека (a–) е адитивно допълване до a и числата M и N са образи съответно на A и B. Тогава числото N е **с *k* по-малко (по-голямо)** от числото M.

Действително.

Нека $M = a - A$, $N = a - B$. От $B = A + k$ следва, че

$N = a - (A + k) = (a - A) - k = M - k$.

Вярно е и обратното твърдение.

MZ-картата на теоремата има вида, показан на схема 20:

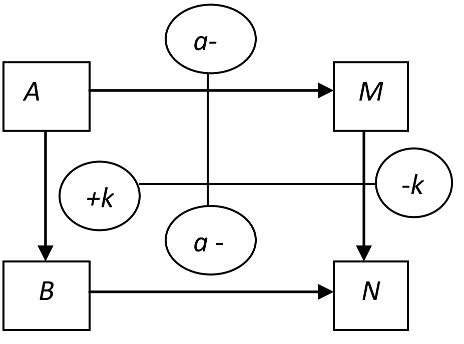


Схема 20

Доказаното свойство на адитивното допълнение дава възможност релацията между числата-първообрази да се „преобразува“ в своята обратна релация между числата-образи и обратно. Това свойство позволява задачата да бъде решена, без да бъде използвана числената стойност на допълването. Това означава, че задачата може да се реши по два начина.

Задача 8. Иван и Георги пътуват с колите си по един и същи път от София до Велико Търново. Иван е изминал 189 км и му остават още 67 км. Георги е изминал 127 км. Още колко километра остават на Георги, за да пристигне във Велико Търново? (Задачата да се реши по два начина.)

Решение

За всеки от двата начина на решение построяваме MZ-картата на задачата, на която представяме структурата на задачата и структурата на решението (сх. 21 и сх. 22).

Отговор. На Георги остават още 129 км.

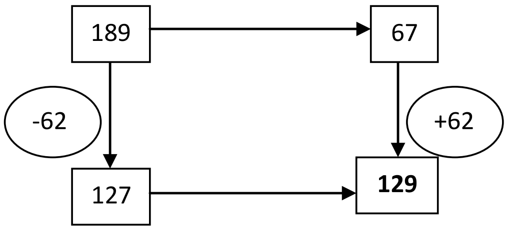


Схема 21

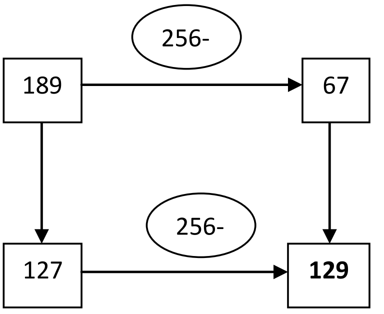


Схема 22

4.3. Карта на задача за права пропорция

Права пропорция наричаме аритметичното „действие“, реализирано от преобразуванието *умножение на* (**.***a*) или от преобразуванието *деление на* (**:***a*). Известно е, че обратното преобразувание на *умножение на* (**.***a*) е *деление на* (**:***a*) и обратно – обратното преобразувание на *деление на* (**:***a*) е *умножение на* (**.***a*). Тъй като преобразуванията *умножение на* (**.***a*) и *деление на* (**:***a*) взаимно се „допълват“ до едно цяло, то *правата пропорция* е „обратимо“ действие, т.е. обратното „действие“ на правата пропорция е права пропорция.

Следващата теорема изразява характеристично **свойство на правата пропорция.**

Теорема. Нека A и B са две числа и числото B е ***k* пъти по-голямо (по-малко)** от числото A. Нека (**.***a*) е права пропорция с коефициент a и числата M и N са образи съответно на A и B. Тогава числото N е ***k* пъти по-голямо (по-малко)** от числото M.

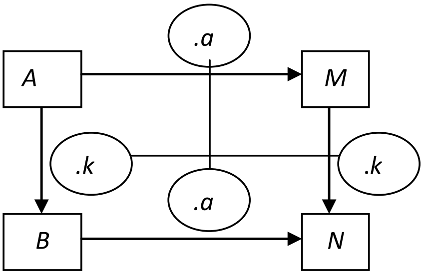


Схема 23

Действително.

Нека $M = A\ .\ a$ и $N = B\ .\ a$. От $B = A\ .\ k$ следва, че

$N = (A\ .\ k)\ .\ a = (A\ .\ a)\ .\ k = M\ .\ k$, т.е. $N = M\ .\ k$.

Теоремата е в сила и за правата пропорция (**:***a*).

Вярно е и обратното твърдение.

Видът на MZ-картата на теоремата е представен на схема 23.

Доказаното свойство на правата пропорция дава възможност релацията между числата-първообрази да се „пренася“ в релация между числата-образи и обратно. Това свойство позволява задача от права пропорция да бъде решена, без да се използва „числената“ стойност (коефициентът) на пропорцията.

Задача 9. Колко килограма ябълки можем да закупим за 18 лева, ако 36 кг ябълки струват 108 лв.? (Да се реши задачата по два начина.)

Решение

За всеки от двата начина на решение построяваме MZ-картата на задачата. На всяка карта представяме структурата на задачата и структурата на нейното решение (сх. 24 и сх. 25).

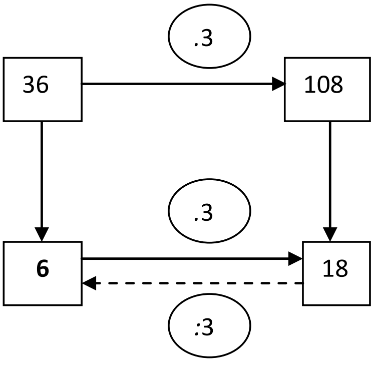


Схема 24

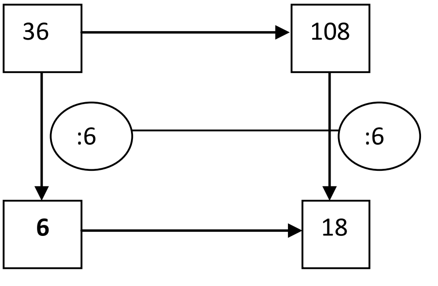


Схема 25

Отговор. 6 кг

4.4. Карта на задача за обратна пропорция

Обратна пропорция (мултипликативно допълване) ще наричаме аритметичното „действие“, реализирано от преобразуванието *деление от* (*a***:**). Известно е, че обратното преобразувание на *деление от* (*a***:**) е *деление от* (*a***:**). Тъй като преобразуванията *деление от* (*a***:**) и *деление от* (*a***:**) взаимно се „допълват“, то *обратната пропорция* е „обратимо“ действие, т.е. обратното „действие“ на обратната пропорция е обратна пропорция.

Следващата теорема изразява характеристично **свойство на обратната пропорция**.

Теорема. Нека A и B са две числа и числото B е ***k*** **пъти по-голямо (по-малко)** от числото A. Нека (a**:**) е обратна пропорция с коефициент a и числата M и N са образи съответно на A и B. Тогава числото N е ***k*** **пъти по-малко (по-голямо)** от числото M .

Действително.

Нека $M = a : A$, $N = a : B$. От $B = A \cdot k$ следва, че

$N = a : (A \cdot k) = (a : A) : k = M : k$.

Вярно е и обратното твърдение.

MZ-картата на теоремата има вида, показан на схема 26:

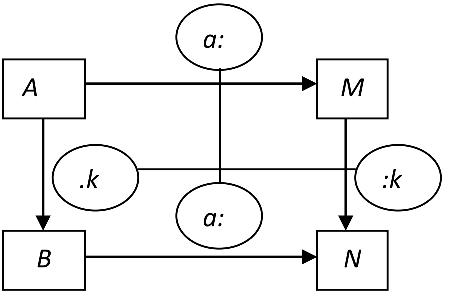


Схема 26

Доказаното свойство на обратната пропорция дава възможност релацията между числата-първообрази да се „преобразува“ в своята обратна релация между числата-образи и обратно. Това свойство позволява задачата да се реши, без да бъде използвана „числената“ стойност (коефициентът) на пропорцията.

Задача 10. Колоездач се движи със средна скорост 24 км/ч и изминава разстоянието от София до Варна за 18 часа. Лека кола изминава същото разстояние за 6 часа. Каква е средната скорост на колата? (Да се реши задачата по два начина.)

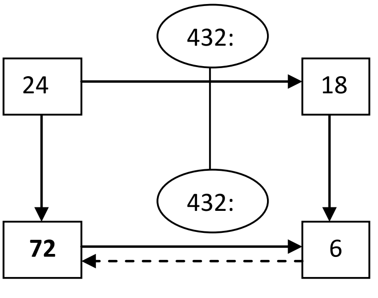


Схема 27

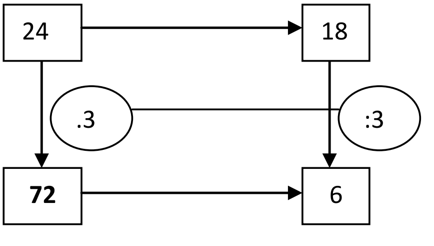


Схема 28

Решение

За всеки от двата начина на решение построяваме MZ-картата на задачата, на която представяме структурата на задачата и структурата на нейното решение (сх. 27 и сх. 28)

Отговор. Леката кола се движи със скорост 72 км/ч.

5. Вместо заключение

В заключение ще построим съкратена MZ-карта на следната състезателна задача.

Задача 11. Трите момчета Ангел, Борис и Васил имали общо 384 марки. Първо Ангел разделил марките, които имал у себе си, на две равни части и оставил едната част за себе си, а другата част разделил поравно между Борис и Васил. След това Борис разделил марките, които имал в момента у себе си, на две равни части и оставил едната част за себе си, а другата част разделил поравно между другите двама. Накрая и Васил направил същото с марките, които имал в момента у себе си. След последното разделяне се оказало, че всички имат по равен брой марки. По колко марки е имал първоначално всеки от тях?

Решение

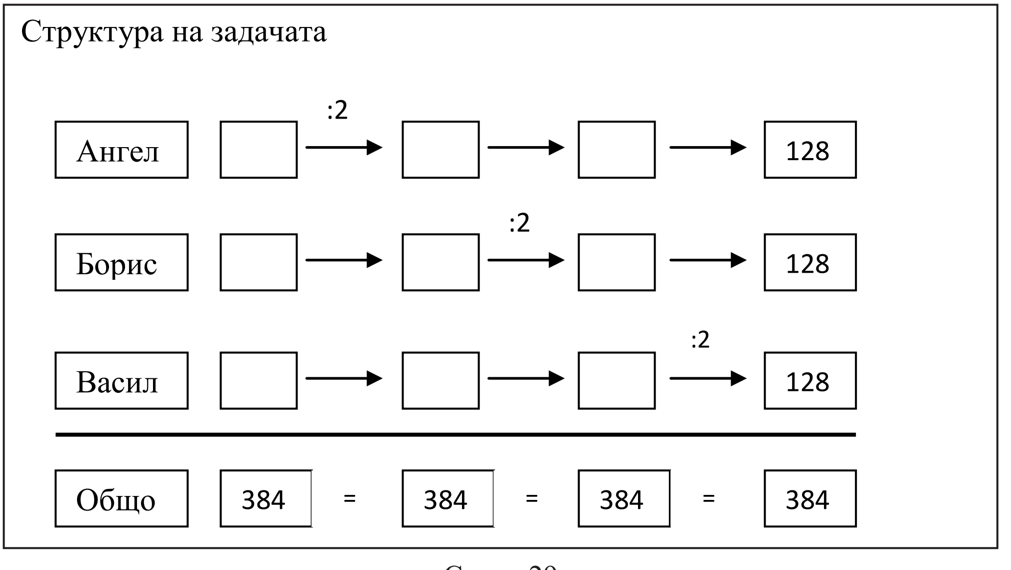


Схема 29

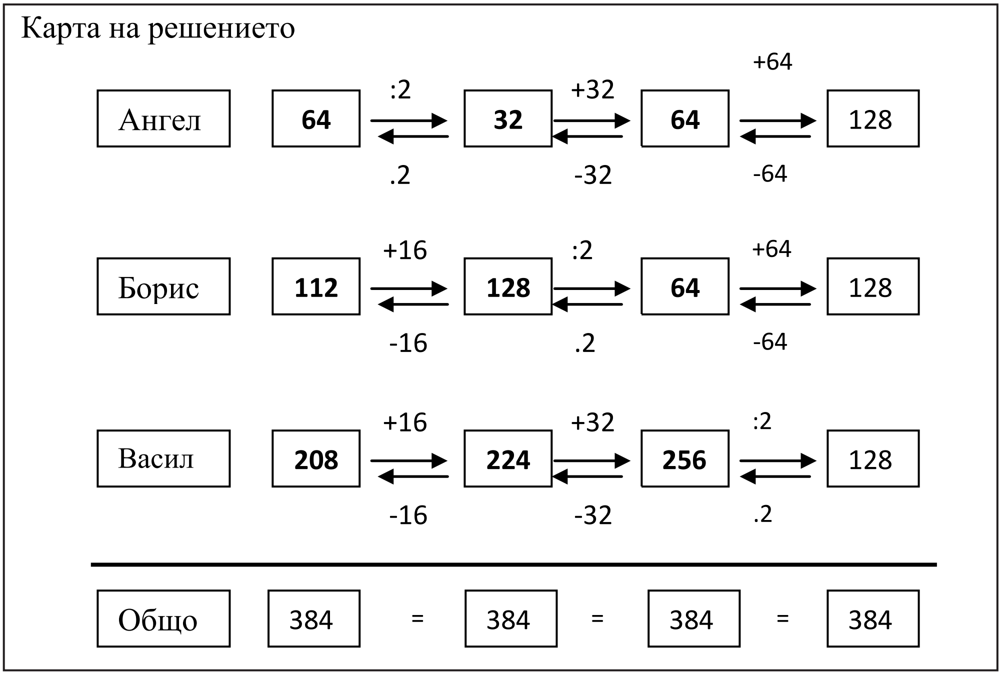


Схема 30

ЛИТЕРАТУРА

Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*, Пловдив: „Астарта“.

Върбанова, М. (2013). Методика на обучението по математика в началните класове, Пловдив: „Астарта“.

Виктор-М. Балиганд, Нинова, Ю.(1993). Пособие за извънкласни форми на работа по Математика за IV клас в началното училище. СИП, факултатив, кръжок. София: ИФ „Модул“.

Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (3), 215 – 246.

Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Два подхода за изучаване на уравнения в началната училищна математика. *Математика и информатика*, 57 (5), 502 – 517.

Ганчев, И. (1976). За математическите задачи, София: „Народна просвета“.

Пойа, Д., (1972). *Как да се решава задача (Един нов аспект на математическия метод)*. София: „Народна просвета“.

Слепкань, З. И. (1983). *Психолого-педагогические основы обучения по математике*. Киев: Радянська школа.
Эрдниев, П. М. & Эрдниев, Б. П. (1986). *Укрупнение дидактических единиц в обучении по математике*. Москва: „Просвещение“.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: Association for the Development of Education.

REFERENCES

Varbanova, M. (2013). *Strukturno-funktsionalno modelirane v nachalnata uchilishtna matematika*, Plovdiv: Astarta.
Varbanova, M. (2013). *Metodika na obuchenieto po matematika v nachalnite klasove*, Plovdiv: Astarta.
Viktor-M. Baligand, Ninova, Yu.(1993). *Posobie za izvanklasni formi na rabota po Matematika za 4. klas v nanachalnoto uchilishte. SIP, fakultativ, krazhok,* Sofiya: IF „Modul“.
Lalchev, Z., Varbanova, M. (2014). Inversiyata – metod v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (3), 215 – 246.
Lalchev, Z., Varbanova, M. (2014). Dva podhoda za izuchavane na uravneniya v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (5), 502 – 517.
Ganchev, I. (1976). *Za matematicheskite zadachi*, Sofiya: Narodna prosveta.
Poya, D., (1972*). Kak da se reshava zadacha (Edin nov aspekt na matematicheskiya metod)*, Sofiya: Narodna prosveta.
Slepkan‘, Z. I. (1983). *Psikhologo-pedagogicheskiye osnovy obucheniya po matematike*, Kiyev: Radyans‘ka shkola.
Erdniyev, P. M. & Erdniyev, B. P. (1986). *Ukrupneniye didakticheskikh yedinits v obuchenii po matematike*, Moskva: Prosveshcheniye.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*, Sofia: Association for the Development of Education.

COMPOSITE ARITHMETIC PROBLEMS. STRUCTURE-TECHNOLOGICAL MODEL AND MZ-MAP OF A PROBLEM. WORD PROBLEMS

Abstract. The paper is focused on composite arithmetic problems in primary school mathematics. The authors follow the concept that the composite arithmetic problem is a composition of connected elementary arithmetic problems. With regard to this the notions of a structure and a problem-component of a composite arithmetic problem are introduced. The dialectic unity of the formulation and the solution of an arithmetic problem reflects on the concept of structural-technological model of a problem in primary school mathematics. Aiming at a graphical representation of the model when studying the problem, the authors suggest a didactical approach, which is connected with the construction of a MZ-map of the problem. In several examples of composite arithmetic problems the explicative role in comprehension of the MZ-map is shown together with its heuristic role in searching an idea for the problem solution. The paper is a continuation of the research of arithmetic problems

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of VelikoTarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg