СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА 8-ма ЖАУТИКОВСКА ОЛИМПИАДА

Сава Гроздев, Кайрош Макишев

Резюме. В статията се анализират резултатите от 8-ма Жаутиковска международна олимпиада, проведена в Алмати, Казахстан, 15–21 януари 2012 г. Дадени са баловете по математика и информатика на трите най-високо класирани училища от България, Казахстан и Русия. Предложени са решения с методически и евристични детайли за шестте задачи от темата по математика.

Keywords: Olympiad, problem solving, achievement, methodology, heuristics

Международната Жаутиковска олимпиада носи името на известния казахстански математик – академик Оримбек Жаутиков (1911–1989). Тя е уникална по рода си. Участниците в нея са училища. Всяко училище се представя с отбор от 7 ученици – трима по математика, двама по физика и двама по информатика. Олимпиадата влючва 3 състезания по посочените 3 предмета, като всяко от тях е много близко по трудност на задачите до съответните международни олимпиади (IMO, IPhO и IOI). Темите се определят от международни журита, в които участват известни специалисти от няколко страни, повечето от които са членове на журитата и на международните олимпиади. Проверката на писмените работи се осъществява от членовете на тези журита. Резултатите от олимпиадата дават възможност да се сравняват качествата на участващите училища от различни държави и да се прави рейтинг. Постоянен домакин е РСФМШИ – Републиканско физико-математическо училище-интернат за даровити деца на името на О. Жаутиков, което се намира в доскорошната столица на Казахстан – гр. Алмати. Вторият автор на настоящата статия е дългогодишен директор на РСФМШИ.

Тази година от 15 до 21 януари се състоя 8-ото издание на Международната

Жаутиковска олимпиада. В нея взеха участие 343 ученици от 54 училищни отбора – представители на 17 държави: Азербайджан, Армения, Афганистан, Беларус, България, Грузия, Индия, Индонезия, Казахстан, Киргизстан, Молдова, Монголия, Румъния, Русия, Таджикистан, Туркменистан и Украйна. От България участваха Софийската математическа гимназия (СМГ), Образцова математическа гимназия от гр. Пловдив (ОМГ) и Математическа гимназия "Д-р П. Берон" от гр. Варна (МГ-В). В класирането по училища СМГ зае второ място след Лицея (СУНЦ) към Московския държавен университет "М. В. Ломоносов" (носител на "Гранд-при") и първия отбор на РСФМШИ (класиран на първо място), ОМГ е на трето място, а 9 училища, между които и МГ-В, бяха отличени с грамоти за много добро представяне. Трябва да отбележим, че МГ-В беше с непълен отбор от 5 ученици, без участници в състезанието по информатика. Домакините от Казахстан регистрираха общо 139 състезатели, разпределени в 17 училищни отбора и 20 индивидуални участници. Бяха раздадени общо 29 златни медала (12 по математика, 10 по физика и 7 по информатика), 58 сребърни (28+16+14) и 84 бронзови (37+26+21). От тях българите спечелиха общо 17 (4 златни, 9 сребърни и 4 бронзови), като само двама се завърнаха без медал. В таблиците по-долу (отделно по математика и информатика) са показани резултатите на трите най-силни отбора. Вижда се, че изоставането на СМГ в сравнение с първия отбор на РСФМШИ се дължи на по-слабите резултати по физика. В същото време СУНЦ са убедително на първо място и по трите дисциплини.

МАТЕМАТИКА

име	отбор/задачи	1	2	3	4	5	6	общо точки	медал
Рафаел Рафаилов	СМГ	7	7	7	7	0	7	35	златен
Николай Крохмал	СУНЦ	7	7	7	7	7	0	35	златен
Богдан Станков	СМГ	7	7	6	7	0	2	29	златен
Антон Зуев	СУНЦ	7	7	0	7	7	0	28	златен
Михаил Сурин	СУНЦ	7	7	1	6	7	0	28	златен
Алибек Сайланбаев	РСФМШИ	7	0	6	7	7	0	27	златен
Сакен Душаев	РСФМШИ	7	2	0	7	7	0	23	златен
Темирлан Сейлов	РСФМШИ	7	0	1	7	3	0	18	сребърен
Мартин Минчев	СМГ	7	2	0	7	0	0	16	сребърен

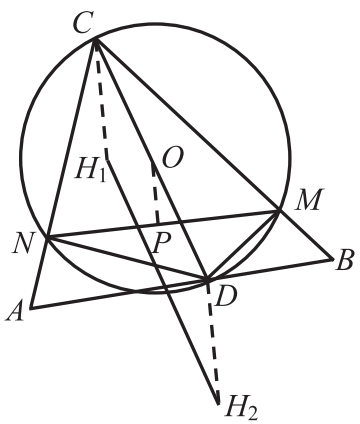
ИНФОРМАТИКА

име	отбор/ задача	1	2	3	4	5	6	7	8	общо точки	медал
Максим Ахмедов	СУНЦ	100	100	100	90	100	100	95	60	745	златен
Георги Георгиев	СМГ	100	70	80	60	100	80	80	0	570	златен
Денис Купляков	СУНЦ	90	100	40	60	100	100	0	24	514	златен
Александър Златков	СМГ	60	50	40	20	65	60	65	0	360	сребърен
Даулет Жалпаков	РСФМШИ	90	50	40	20	50	80	0	24	354	сребърен
Йерсин Мукай	РСФМШИ	50	10	40	60	55	60	0	0	275	бронзов

Ето задачите по математика и техни решения:

Задача 1. От точка D върху страната AB на остроъгълен ΔABC са спуснати перпендикуляри към страните BC и AC, като петите им са означени съответно с M и N. Ако H_1 и H_2 са ортоцентровете съответно на ΔMNC и ΔMND, да се докаже, че лицето на четириъгълника AH_1BH_2 не зависи от положението на D върху AB.

(*България*)



Решение: От условието следва, че точките N, D, M и C лежат на окръжност с диаметър CD. Нека O е центърът на тази окръжност и P е проекцията й върху NM. Известно е, че във всеки триъгълник разстоянието от кой да е негов връх до ортоцентъра на триъгълника е два пъти по-голямо от разстоянието от центъра на описаната окръжност до срещуположната на този връх страна (Хитов, 1990). В конкретния случай имаме, че $CH_1=2OP$ и $DH_2=2OP$, откъдето $CH_1=DH_2$. Но CH_1 и DH_2 са поотделно перпендикулярни на NM и следователно $CH_1 \parallel DH_2$. Заключаваме,

че четириъгълникът CH_1H_2D е успоредник и оттук $H_1H_2 = CD$. Ако сега $\angle ADC = \varphi$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.CD \sin \varphi$ от една страна, а от друга $S_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2} AB.H_1H_2 \sin \varphi$ и следователно $S_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2} AB.H_1H_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} AB.CD \sin\varphi = S_{ABC}$, с което доказателството е завършено.

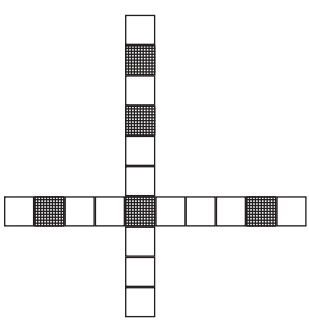
Забележка. Твърдението в задачата остава вярно и когато точка D е върху правата AB.

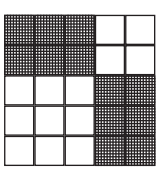
Тази задача беше решена пълно от около 70% от всички участници в олимпиадата. Прави впечатление голямото богатство от идеи, които могат да се използват при решаването й. Тук няма да се спираме на разнообразието, но ще отбележим, че голяма част от българските ученици не са отчели факта, че става дума за първа задача и би следвало да се предположи, че решението е по-леко. Например Богдан Станков се е насочил към сложна параметризация и използване на тригонометрия. Въпреки, че е довел решението докрай, това му е струвало ненужна загуба на време.

Задача 2. Едно разполагане на пионки върху дъска $n \times n$ ($n \geq 5$), с не повече от една пионка в единично квадратче, се нарича "удобно", ако всеки ред и всеки стълб на дъската съдържа поне 2 пионки. Да се намери възможно най-голямото m, за което съществува удобно разполагане така, че при премахване на коя да е от пионките разполагането вече не е удобно.

(*Беларус*)

Решение: Под кръст ще разбираме обединението на ред и стълб на дъската, ако и редът, и стълбът съдържат поне по 3 пионки от удобно множество S и общото им квадратче също съдържа пионка от S (вж. първия чертеж).





По-долу ще докажем, че ако за броя s на елементите на S е изпълнено $s \geq 4n - 7$, то на дъската ще има със сигурност кръст. Но тогава общата пионка в кръста може да се отстрани и S ще остане удобно. Оттук ще следва, че търсеният максимум не надминава $4n - 7 - 1 = 4n - 8$. Ситуация, при която този брой се достига, е показана на втория чертеж при $n = 5$. За по-големи n примерите са аналогични: например сечението на първите 2 реда отгоре надолу и първите $n - 2$ стълба отляво надясно, както и сечението на останалите редове и последните 2 стълба, се запълват изцяло с пионки.

Нека най-напред $n = 5$, 6 или 7. Да разгледаме онзи измежду редовете и стълбовете, който е с най-много пионки от S и да означим този брой с k. Ясно е, че $k \geq 3$. В противен случай броят на елементите на S е $2n$, но $2n < 4n - 8$. За определеност ще считаме, че тези k пионки са разположени в горния край на най-левия стълб. Можем също да считаме, че произволен ред от най-горните k реда съдържа не повече от 2 пионки, защото в противен случай бихме имали кръст и твърдението ще е доказано. Заключаваме, че общият брой пионки в най-горните k реда на дъската е най-много $2k$. Останалите $n - k$ реда съдържат най-много $k(n - k)$ пионки от S и тогава $4n - 7 \leq s \leq 2k + k(n - k)$, откъдето $k^2 - (n + 2)k + 4n - 7 \leq 0$. Дискриминантата на полученото квадратно неравенство относно k е $(n + 2)^2 - 4(4n - 7) = (n - 4)(n - 8)$ и очевидно е отрицателна за n = 5, 6 или 7. Заключаваме, че $k^2 - (n + 2)k + 4n - 7 > 0$, което е противоречие.

Да допуснем сега, че твърдението е доказано за $n = k$. Ще го докажем за $n = k + 3$. Да забележим, че съществува ред с поне 3 пионки от S, защото в противен случай ще излезе, че $s \leq 2n$ и неравенството $s \geq 4n - 7$ ще бъде нарушено. По същата причина съществува и стълб с поне 3 пионки от S. Да разгледаме такъв ред и такъв стълб. Без ограничение нека избраният стълб е най-левият и нека пионките от S в него са в горния му край. Също, нека избраният ред е най-долният и нека пионките от S в него са в десния му край (вж. чертежа). Ако някой от най-горните 3 реда съдържа поне 3 пионки от S, то този ред заедно с най-левия стълб образува кръст. Следователно можем да предположим, че всеки от най-горните 3 реда, както и всеки от най-десните 3 стълба съдържа най-много по 2 пионки от S. Получаваме, че в шахматно оцветената част от дъската на чертежа се съдържат най-много 12 пионки от S. Тогава от неравенството $s \geq 4n - 7 = 4(k + 3) - 7 = 4k - 7 + 12$ следва, че в оставащата $k \times k$ дъска (с неоцветените квадратчета) се съдържат поне $4k - 7$ пионки от S. Съгласно индукционното допускане тук ще има кръст, който очевидно ще бъде кръст и за дъската $n \times n$. С това задачата е решена.

Задача 3. Полиномите $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ са с реални коефициенти и за всяко x е изпълнено равенството $P(Q(x)) + P(R(x)) = const.$ Да се докаже, че поне един от полиномите $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ е от нулева степен.

(*Русия*)

Решение: Без ограничение можем да считаме, че старшият коефициент на $P(x)$ е равен на 1. Нека $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, където $n \geq 1$. Тогава $P(Q(x)) + P(R(x)) = Q^n + a_1Q^{n-1} + ... + a_{n-1}Q + R^n + a_1R^{n-1} + ... + a_{n-1}R = c = const$

Ако $\deg Q \neq \deg R$ и например $\deg Q > \deg R$, то

$$1+\frac{a_1}{Q}+...+\frac{a_{n-1}}{Q^{n-1}}+\left(\frac{R}{Q}\right)^n+a_1\frac{R^{n-1}}{Q^{n-1}}+...=\frac{c}{Q^n}$$

Полученото равенство е невъзможно, защото лявата му част клони към 1 при x клонящо към безкрайност, докато дясната му част клони към 0. Заключаваме, че

$$\deg Q = \deg R \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)=0,$$

където a и b са старшите коефициенти съответно на R и Q. Оттук следва, че n е нечетно число и $b = -a$. Сега можем да напишем $Q(x) = ax^l + Q_1(x)$ и $R(x) = -ax^l + R_1(x)$, където $l = \deg Q = \deg R$ и $\deg Q_1 < l$, $R_1 < l$. Равенството по-горе може да се запише във вида:

$$(Q + R)(Q^{n-1} - Q^{n-2}R + ... - QR^{n-2} + R^{n-1}) + a_1(Q^{n-1} + R^{n-1}) + ... - c = 0, \text{ т.е.}$$
$$(Q_1 + R_1)(Q^{n-1} - Q^{n-2}R + ... - QR^{n-2} + R^{n-1}) + a_1(Q^{n-1} + R^{n-1}) + ... - c = 0.$$

Да разгледаме събираемото $(-1)^{k-1}Q^{n-k}R^{k-1}$ от вторите скоби. Старшият коефициент в него е равен на $(-1)^{k-1}a^{n-k}(-a)^{k-1}x^{l(n-1)}$. Старшият коефициент на $a_1(Q^{n-1} + R^{n-1})$ е равен на $a_1.2a^{n-1}x^{l(n-1)}$. По такъв начин разглежданият израз става:

$$(Q_1 + R_1)(na^{n-1}x^{l(n-1)} + ...) + a_1.2a^{n-1}x^{l(n-1)} + ... + ... - c = 0.$$

Последното равенство е невъзможно, ако $(Q_1 + R_1)na^{n-1} \neq -a_1.2a^{n-1}$. Така заключаваме, че $Q_1 + R_1 = -\frac{2a_1}{n}$ и следователно $Q(x) + R(x) = -\frac{2a_1}{n}$ е константа.

Задача 4. Съществуват ли цели числа $m \leq n$ и функция $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ така, че $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ за всяко $x \in \mathrm{R}$ и $f(m) = n$?

(*Беларус*)

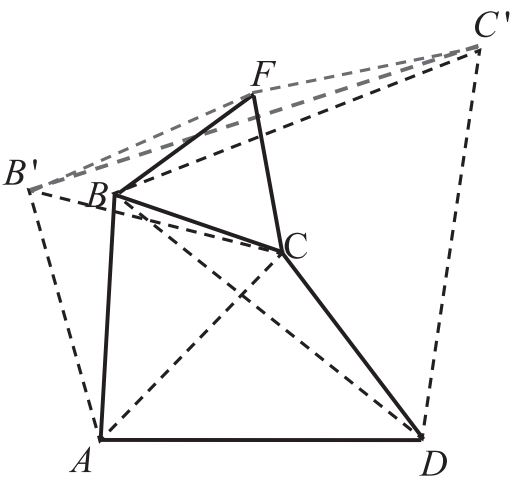
Решение: Ще докажем, че такава функция и такива числа не съществуват едновременно. Нека $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ е такава функци, че $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ за всяко $x \in \mathrm{R}$. Ще докажем, че не съществуват цели числа m и $k \geq 0$, за които $f(m) = m + k$. Ако $k = 0$, то $f(m) = m$ и като положим $x = m$ в дефиниционното равенство за f, получаваме $m = f(m) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = 2m - m - 2 = m - 2$. Оттук $m = m - 2$, което е невъзможно. Нека $k = 1$. Сега $f(m) = m + 1$, откъдето $f(m + 1) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = 2(m + 1) - m - 2 = m$ и следователно $f(m + 1) = m$. Но тогава $m + 1 = f(m) = f(f(m + 1)) = 2f(m + 1) - (m + 1) - 2 = 2m - m - 3 = m - 3$ и получаваме противоречие. По-нататък нека $k \geq 2$ е такова, че $f(m) = m + k$ и да предположим, че k е възможно най-малкото с това свойство. Имаме:

$$f(m + k) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = 2(m + k) - m - 2 = (m + k) + (k - 2)$$

Да положим $m_1 = m + k$ и $k_1 == k - 2$. Тогава $f(m_1) = m_1 + k_1$, което противоречи на минималността на k в случай, че $k_1 \geq 2$. Ако $k_1 < 2$, то $k_1 = 0$ или $k_1 = 1$, които случаи бяха отхвърлени по-горе. С това твърдението е доказано.

Задача 5. На диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са построени равностранни триъгълници ACB' и BDC' така, че върховете B и B′ са в една и съща полуравнина спрямо диагонала AC, а C и C′ са в една съща полуравнина спрямо диагонала BD. Да се намери градусната мярка на $\angle BAD + \angle CDA$, ако $B'C' = AB + CD$.

(*Армения*)



Решение: Построяваме равностранния триъгълник BCF, както е показано на чертежа. Тогава $\angle FBC = 60° = \angle C'BD$ и следователно $\angle FBC' = \angle CBD$. Като използваме, че $BF = BC$ и $BC' = BD$, заключаваме, че $\Delta BFC' \cong \Delta BCD$. Оттук $FC' = CD$ и $\angle FBC' = \angle BCD$. Аналогично, $B'F = AB$ и $\angle B'FC = \angle ABC$. Сега от равенството $B'C' = AB + CD$ следва равенството $B'C' = B'F + FC'$ и следователно точката F лежи на отсечката $B'C'$. Но тогава $\angle B'FC + \angle BFC' = 180° + \angle BFC = 240°$. Получаваме, че $\angle BCD + \angle ABC = \angle BFC' + \angle B'FC = 240°$ и следоваетлно $\angle BAD + \angle CDA = 120°$.

Забележка. Аналогични решения могат да се получат, ако се построят равностранни триъгълници на BB', CC' или AD. Подробностите оставяме за читателите.

Тази задача, макар че се решава със знания за 7 клас, задрудни учениците от СМГ. Тя не беше решена и от останалите български ученици. Единствено Милена Великова от МГ-В заслужи максималните 7 точки. Пълните решения на представителите на СУНЦ и РСФМШИ използват комплексни числа, което става на няколко реда.

Задача 6. Да се реши в цели числа уравнението $2x - y^{14} = 1$.

(*Армения*)

Лема 1. Ако $n > 1$ е естествено число, то числото $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ не е точен квадрат.

Доказателство: Ако допуснем, че числото $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ е точен квадрат, то и числото $256(n+1)^2(n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1)$ ще бъде точен квадрат. Ще докажем, че това е невъзможно. Тъй като

$$256(n+1)^2(n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) =$$
$$= 256(n+1)(n+1)(n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) =$$
$$= 256(n+1)(n^7+1) = 256(n^8 + n^7 + n + 1),$$

достатъчно е да докажем, че $256(n^8 + n^7 + n + 1)$ е заключено между два последователни точни квадрата. При $n \geq 3$ е изпълнено:

$$(16n^4 + 8n^3 - 2n^2 + n - 1)^2 < 256(n^8 + n^7 + n + 1) < (16n^4 + 8n^3 - 2n^2 + n)^2,$$

което се проверява чрез разкриване на скобите. Наистина, лявото неравенство е еквивалентно с $12n^4 + 20n^3 - 5n^2 + 254n + 255 > 0$, за верността на което е достатъчно да се забележи, че $12n^4 - 5n^2 > 10n^4 - 5n^2 = 5n^2(2n^2 - 1) > 0$ (останалите членове на неравенството са положителни). Дясното неравенство е еквивалентно с $20n^4 - 4n^3 + n^2 - 256n - 256 > 0$ и е достатъчно да се докаже, че $20n^4 - 4n^3 - 256n - 256 > 0$, което е еквивалентно с $5n^4 - n^3 - 64n - 64 > 0$. Тъй като $n^4 - n^3 > 0$, остава да се провери, че $4n^4 - 64n - 64 > 0$, т.е. че $n^4 - 16n - 16 > 0$. Лявата страна на последното неравенство е растяща функция на n, защото производната ѝ $4n^3 - 16 = 4(n^3 - 4) > 0$ при $n \geq 3$, а самата функция приема положителна стойност $3^4 - 16.3 - 16 = 17$ при $n = 3$.

Сега, когато се върнем към твърдението в лемата, достатъчно е да проверим, че при $n = 2$ имаме $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 = 43$ и следователно лемата е доказана.

Методическа забележка. Естествен подход за доказване, че едно число не е точен квадрат, е да се намерят два последователни точни квадрата, между които това число се намира. Тъй като $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ е от 6-та сте-

пен относно n, ще потърсим два многочлена на n, между квадратите на които $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ се намира. Ясно е, че тези многчлени трябва да са от 3-та степен и за намирането им ще използваме метода на неопределените коефициенти. Нека многочленът $n^3 + an^2 + bn + c$ е такъв, че $(n^3 + an^2 + bn + c)^2 < n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$. След разкриване на скобите получаваме $n^6 + 2an^5 + (a^2 + 2b)n^4 + 2(ab+c)n^3 + (b^2 + 2ac)n^2 + 2bcn + c^2 < n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$.

Като приравним коефициентите пред първите три най-високи степени на n (неизвестните коефициенти a, b и c са три на брой и затова ни трябват точно три зависимости), последователно получаваме: $2a = -1$, откъдето $a = -\frac{1}{2}$; $a^2 + 2b = 1$, откъдето $2b = 1 - a^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ и $b = \frac{3}{8}$; $2c + 2\,ab = -1$, откъдето

$$c = -\frac{1}{2} - ab = -\frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

Сега неравенството $(n^3 + an^2 + bn + c)^2 < n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ става

$$\left(n^3 - \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{8} - \frac{5}{16}\right)^2 < n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1,$$

което е еквивалентно последователно с

$$n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + \frac{29}{64}n^2 - \frac{15n}{64} + \frac{25}{256} < n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1,$$

$$0 < \frac{35}{64}n^2 - \frac{49}{64}n + \frac{231}{256} \text{ и } 0 < 35n^2 - 49n + \frac{231}{4}.$$

Последното е изпълнено за всяко n, защото дискриминантата на квадратния тричлен е $D = 49 - 35.231 < 0$. Аналогично търсим d, e и f така, че

$$n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 < (n^3 + dn^2 + en + f)^2.$$

По описания начин намираме $d = -\frac{1}{2}$, $e = \frac{3}{8}$ и $f = -\frac{1}{4}$.

Тогава $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 < n^6 - n^5 + n^4 - \frac{7n^3}{8} + \frac{25n^2}{64} - \frac{3n}{16} + \frac{1}{16}$, което е еквивалентно последователно с $0 < \frac{n^3}{8} - \frac{39}{64}n^2 + \frac{13}{16}n - \frac{15}{16}$ и $0 < n^2(8n - 39) + 4(13n - 15)$. Последното неравенство очевидно е изпълнено при $n \geq 4$. Следователно при $n \geq 4$

имаме

$$\left(n^3-\frac{n}{2}+\frac{3n}{8}-\frac{5}{16}\right)<n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1<\left(n^3-\frac{n}{2}+\frac{3n}{8}-\frac{1}{4}\right).$$

Оттук $(16n^3-8n^2+6n-5)^2<256(n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1)<(16n^3-8n^2+6n-4)^2$, което непосредствено се проверява, че е изпълнено също при $n = 2$ и $n = 3$.

Лема 2. Ако n е естествено число, то най-големият общ делител на $n + 1$ и $n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1$ е равен на 1 или 7.

Доказателство: Имаме:

$n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1-7=(n^6-1)-(n^5+1)+(n^4-1)-(n^3+1)+(n^2-1)-(\mathrm{n}+1)$, което очевидно се дели на n+1. Оттук непосредствено следва, че ако $(n+1,\ n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1)=d$, то d дели 7.

Решение на задача 6: Нека $(x; y)$ е решение на задачата. Тогава

$2x^2=y^{14}+1=(y^2)^7+1=(y^2+1)\,((y^2)^6-(y^2)^5+(y^2)^4-(y^2)^3+(y^2)^2-(y^2)+1)=$
$=(y^2+1)(y^{12}-y^{10}+y^8-y^6+y^4-y^2+1).$

Тъй като числото $y^2 + 1$ не се дели на 7 (за да докажем този факт, достатъчно е да разгледаме различните възможности за y по модул 7), то съгласно лема 2

$(y^2+1,\ y^{12}-y^{10}+y^8-y^6+y^4-y^2+1)=1.$

От друга страна числото $y^{12}-y^{10}+y^8-y^6+y^4-y^2+1$ е нечетно и следователно трябва да съществуват естествени числа u и v така, че $y^2+1=2u^2$ и $y^{12}-y^{10}+y^8-y^6+y^4-y^2+1=v^2$. Сега от лема 1 следва, че $y = 1$, а значи и $x = 1$. Следователно единственият отговор на задачата е $(x; y) = (1; 1)$.

За разлика от СУНЦ и РСФМШИ, учениците от СМГ са справиха сравнително добре върху задача 6. Да отбележим, че всички участници в олимпиадата постигнаха общо 47 точки върху тази задача, като повече от половината (24 точки) са на българските ученици. Освен Рафаел Рафаилов от СМГ, задачата беше решена от Николай Каракехайов от ОМГ и Йордан Йорданов от МГ-В, а Виктор Радивчев от МГ-В постигна частичен успех по подобие на Богдан Станков от СМГ.

ЛИТЕРАТУРА

Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE 8TH ZHAUTYKOV OLYMPIAD

Abstract. The paper analyses the results of the 8th Zhautykov International Olympiad, held in Almaty, Kazkhstan, January 15–21, 2012. The scores in Mathematics and Informatics of the three highly ranked schools from Bulgaria, Kazakhstan and Russia are listed. Solutions with methodological and heuristic details are proposed for the six problems from the Mathematics Competition paper.

✉ Sava Grozdev
Professor, Doctor in Mathematics, DSc in Pedagogy
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
sava.grozdev@gmail.com

Kairosh Makishecv
Doctor in Physics-Mathematics
Director RSPhMSBS
Buhar Zhirau Street, 36
050040 Almaty, Republic of Kazakhstan
makishev@mail.ru