СПУТНИКОВЫЕ СИСТЕМЫ КАК АНИМАЦИОННО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛИНОМОВ

Сергей Ларин
Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева (Россия)

Аннотация. В статье дано новое анимационно-геометрическое представление полиномов на комплексной плоскости при условии, что модуль комплексной переменной равен 1, в виде спутниковых систем. Аналогичное представление в виде пространственных спутниковых систем дано для полиномов от комплексной переменной z, $|z|=1$, коэффициенты которых являются векторными кватернионами (их скалярная часть равна нулю). Представлена эффективность и целесообразность использования анимационных рисунков как средства визуализации математических знаний в современной дидактике обучения математике.

Ключевые слова: анимационные рисунки; GeoGebra; спутниковая система; комплексные числа; кватернионы; многочлены

Введение

Материал статьи имеет два аспекта: чисто математический и методический. С математической точки зрения представлен новый анимационно-геометрический взгляд на многочлены от комплексной переменной z при условии $|z|=1$ как на спутниковые системы на плоскости и в пространстве. Этот материал в школе и в педагогическом вузе можно использовать как основу для организации учебно-исследовательской деятельности, расширяющей и углубляющей обязательные знания по комплексным числам. С методической точки зрения в статье демонстрируется роль и значение анимационных рисунков, выполненных в компьютерной среде GeoGebra. Они не только позволяют визуализировать математические понятия, но и делать математические утверждения очевидными в буквальном смысле этого слова (их «очи видят»). Кроме того, они приобщают обучаемого к технологиям для будущего, формируя личность, которая призвана раскрыть свой творческий потенциал в условиях цифровой экономики. Анимационные рисунки позволяют экспериментировать, поддерживая исследовательский стиль обучения математике, и представляют собой элементы цифровизации образования.

Выбор программы GeoGebra обусловлен тем, что она свободно распространяется, содержит достаточно широкий инструментарий и проста в освоении. Интернет-ресурс Geogebra.org[1)] содержит большой объем демонстрационного учебно-исследовательского материала, который непрерывно пополняется. С работами автора в этом направлении можно познакомиться по публикациям, перечисленным в списке литературы.

1. Спутниковая система порядка *n* и ее определяющий многочлен

Представим следующую картину. На координатной плоскости начало координат назовем звездой. Вокруг звезды по круговым орбитам вращаются точки – спутники звезды. Вокруг некоторых из них по круговым орбитам вращаются точки – спутники спутников, и так далее. Как алгебраически описать такую спутниковую систему? Прежде, чем перейти к решению этой задачи, дадим конструктивное определение спутниковой системы порядка *n*, а для этого предварительно введем вспомогательное понятие.

Определение 1. *Набором числовых параметров спутниковой системы порядка* n назовем запись вида $S((r_1, p_1, k_1),...,(r_n, p_n, k_n))$, где $r_1,...,r_n$ – положительные действительные числа, называемые *радиусами орбит* спутников системы, $p_1,..., p_n$ – целые неотрицательные числа, называемые *показателями вращения* спутников, $k_1,...,k_n$ – комплексные числа, модуль которых равен 1, которые будем называть *угловыми коэффициентами* спутников.

Сформулируем конструктивное определение спутниковой системы порядка n, описывая ее построение. Анимационный рисунок 1 демонстрирует это построение для $n = 3$.

Определение 2. *Спутниковой системой порядка* n, заданной набором числовых параметров $S((r_1, p_1, k_1),...,(r_n, p_n, k_n))$, называется последовательность точек $O_0, O_1,..., O_n$, которая строится следующим образом.

1. *Построение исходных данных*. Начало координат обозначим O_0 и назовем звездой. Строим единичную окружность и отмечаем на ней точку, изображающую комплексную переменную z, которую будем называть независимой планетой. На единичной окружности строим точки, изображающие угловые коэффициенты $k_1,...,k_n$. Вводим углы $\varphi = \arg(z)$, $\alpha_1 = \arg(k_1)$, ..., $\alpha_n = \arg(k_n)$. Ползунками вводим радиусы орбит $r_1,...,r_n$ и показатели вращений $p_1,..., p_n$.

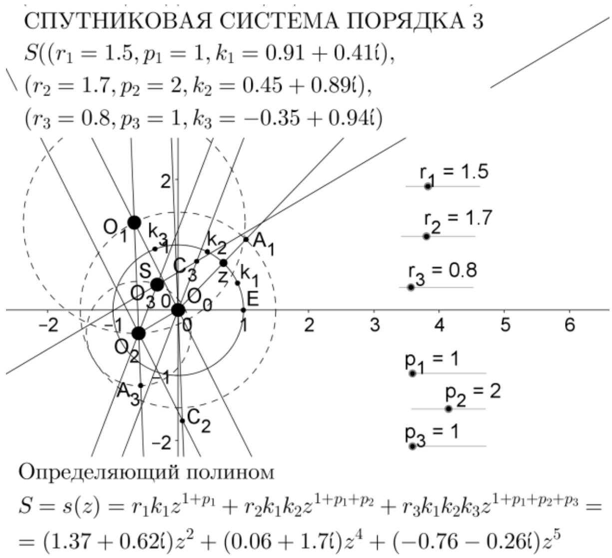

Рис. 1. Стоп-кадр анимационного изображения спутниковой системы

2. *Начало построения спутниковой системы* (построение первого спутника O_1). Строим окружность с центром в точке O_0 и радиусом r_1, получаем орбиту первого спутника. Строим луч O_0z и отмечаем точку A_1 пересечения луча и построенной орбиты. Поворачиваем точку A_1 вокруг точки O_0 на угол $\alpha_1 + p_1\varphi$ и получаем точку, которая является первым спутником O_1 (спутником звезды O_0). Если $n = 1$, то построение закончено. В противном случае продолжаем построения.

3. *Шаг построения* (построение следующего спутника). Пусть уже построена круговая орбита и на ней спутник O_j для O_{j-1}. Строим орбиту следующего спутника O_{j+1} в виде окружности с центром в точке O_j и радиусом r_{j+1}. Строим луч $O_{j-1}O_j$ и выделяем из него луч с началом в точке O_j, не содержащий точки O_{j-1}. Отмечаем точку A_{j+1} пересечения этого луча с построенной орбитой. Поворачиваем точку A_{j+1} вокруг точки O_j на угол $\alpha_{j+1} + p_{j+1}\varphi$ и получаем $j+1$-й спутник O_{j+1}. Если $j+1 = n$, то построение закончено. Иначе выполняем очередной шаг построения. Построенная спутниковая система порядка n приходит в движение при анимации независимой планеты z по единичной окружности.

Геометрический смысл показателя вращения p_j спутника O_j просматривается в повороте точки A_j на угол $\alpha_i + p_i\varphi$, приводящего к построению спутника O_j число p_j показывает количество оборотов спутника, совмещающих его с точкой A_j, за время одного оборота независимой планеты z по своей орбите. Глядя на анимационный рисунок, можно подсчитать количество оборотов спутника O_j вокруг O_{j-1} за это же время и убедиться, что оно равно $1+p_1+\ldots+p_j$ – факт, который будет доказан ниже. В этом еще одно проявление геометрического смысла показателей вращения.

Для алгебраического описания спутниковой системы порядка n всякую точку (a,b) координатной плоскости будем трактовать как комплексное число $a+bi$ и координатную плоскость называть комплексной плоскостью. Следующая теорема показывает вид алгебраической зависимости спутников как комплексных чисел от независимой планеты z (независимой переменной).

Теорема 1. *Пусть дана спутниковая система порядка n набором числовых параметров $S((r_1,p_1,k_1),\ldots,(r_n,p_n,k_n))$ и изображениями на плоскости звезды – точки O_0 в начале координат, планеты z – точки на единичной окружности и спутников $O_1,\ldots,O_n$, построенных в соответствии с определением 2. Тогда для любого $j=1,\ldots,n$*

$$O_j = r_1k_1z^{1+p_1} + r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2} + \ldots + r_jk_1\ldots k_jz^{1+p_1+\ldots+p_j},$$

причем когда планета z совершает один оборот вокруг звезды O_0, спутник O_j делает $q_j = 1+p_1+\ldots+p_j$ оборотов вокруг O_{j-1}.

Доказательство. 1) На рисунке 1 видим, что $|O_1| = r_1$ и по построению $\arg O_1 = \varphi + \alpha_1 + p_1\varphi$. Следовательно, $O_1 = r_1k_1z^{1+p_1}$. Отсюда следует, что за один оборот точки z по единичной окружности точка O_1 совершает вокруг начала координат $q_1 = 1+p_1$ оборотов.

2) Рассматривая на рисунке 1 параллелограмм $O_0O_1O_2C_2$ и его вершины как комплексные числа, получаем $O_2 = O_1 + C_2$, $|C_2| = r_2$. При параллельных O_1O_2 и O_0C_2 и секущей O_0A_2 отметим равенство углов $\angle O_1O_0C_2 = \angle A_2O_1O_2$, откуда

$$\arg C_2 = \angle EO_0O_1 + \angle O_1O_0C_2 =$$

$$= \arg O_1 + \alpha_2 + p_2\varphi = \varphi + \alpha_1 + p_1\varphi + \alpha_2 + p_2\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 + (1+p_1+p_2)\varphi.$$

Следовательно, $C_2 = r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2}$ и $O_2 = r_1k_1z^{p_1+1} + r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2}$.

3) Пусть для $j \ge 2$ доказано, что $O_j = r_1k_1z^{1+p_1} + r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2} + \ldots + r_jk_1\ldots k_jz^{1+p_1+\ldots+p_j}$ и в параллелограмме $O_0O_{j-1}O_jC_j$ вершина C_j как комплексное число выражается через z равенством $C_j = r_jk_1\ldots k_jz^{1+p_1+\ldots+p_j}$. Рассмотрим параллелограмм $O_0O_jO_{j+1}C_{j+1}$. По построению, $|C_{j+1}| = r_{j+1}$ и $\arg C_{j+1} = \arg C_j + \alpha_{j+1} + p_{j+1}\varphi$. Следовательно,

$$\arg C_{j+1} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_j + (1+p_1+\ldots p_j)\varphi + \alpha_{j+1} + p_{j+1}\varphi =$$

$$= \alpha_1 + \ldots + \alpha_j + \alpha_{j+1} + (1 + p_1 + \ldots + p_j + p_{j+1})\varphi$$

Отсюда $C_{j+1} = r_{j+1}k_1 \ldots k_{j+1}z^{p_{j+1}+\ldots+p_1+1}$. Остается заметить, что $O_{j+1} = O_j + C_{j+1}$. Из доказанной формулы для O_j, рассматривая параллелограмм $O_0 O_{j-1} O_j C_j$, видим, что точка O_j совершает вокруг точки O_{j-1} столько же оборотов, сколько совершает точка C_j вокруг начала координат. Из формулы для C_j вытекает, что это число равно $q_j = 1 + p_1 + \ldots + p_j$. Теорема доказана.

Например, на рисунке 1, рассматривая параллелограмм $O_0 O_2 O_3 C_3$, видим, что по построению, $|C_3| = r_3$ и $\arg C_3 = \arg C_2 + \alpha_3 + p_3\varphi$. Следовательно, $\arg C_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + (1 + p_1 + p_2)\varphi + \alpha_3 + p_3\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + (1 + p_1 + p_2 + p_3)\varphi$, откуда $C_3 = r_3 k_1 k_2 k_3 z^{1+p_1+p_2+p_3}$ и $O_3 = O_2 + C_3 = r_1 k_1 z^{1+p_1} + r_2 k_1 k_2 z^{1+p_1+p_2} + r_3 k_1 k_2 k_3 z^{1+p_1+p_2+p_3}$.

На рисунке 1 одновременно представлен определяющий полином спутниковой системы в смысле следующего определения.

Определение 3. Пусть спутниковая система порядка n дана набором ее числовых параметров $S((r_1, p_1, k_1), \ldots, (r_n, p_n, k_n))$. Полином

$$s(z) = r_1 k_1 z^{p_1+1} + r_2 k_1 k_2 z^{p_2+p_1+1} + \ldots + r_n k_1 \ldots k_n z^{p_n+\ldots+p_1+1}$$

назовем *определяющим полиномом* данной спутниковой системы.

На анимационном рисунке 1 видим, что последний спутник O_3 совпадает с точкой $S = s(z)$ при $|z| = 1$, что подтверждает теорему 1.

Непосредственно из определения 3 вытекает, что последний спутник спутниковой системы порядка n, оставляя след, вычерчивает кривую, которая является образом единичной окружности при действии на комплексной плоскости определяющего многочлена. Обращаясь к статьям (Larin & Mayer, 2018), (Larin, 2019), можно установить, что эта кривая является улиткой Паскаля порядка n.

2. Построение спутниковой системы порядка *n* по полиному

Докажем теорему, которая высвечивает путь построения спутниковой системы порядка n по данному полиному.

Теорема 2. *Пусть дан полином с ненулевыми комплексными коэффициентами от комплексной переменной* $s(z) = a_1 z^{q_1} + \ldots + a_n z^{q_n}$, *где* $0 < q_1 < \ldots < q_n$, $|z| = 1$. *Построим единичную окружность и точку* z *на ней. Построим точки* $S_0 = 0$, $S_j = a_1 z^{q_1} + \ldots + a_j z^{q_j}$ *для* $j = 1, \ldots, n$. *Тогда последовательность точек* $S_0, S_1, \ldots, S_n$ *является спутниковой системой порядка* n, *заданной набором числовых параметров* $S((r_1, p_1, k_1), \ldots, (r_n, p_n, k_n))$, *где* $r_j = |a_j|$, $q_0 = 1$, $p_j = q_j - q_{j-1}$, $k_j = \dfrac{a_j |a_{j-1}|}{|a_j| a_{j-1}}$, *причем данный полином является для нее определяющим.*

Доказательство. Рассматривая равенство полиномов $s(z) = a_1 z^{q_1} + \ldots + a_n z^{q_n}$ $= r_1 k_1 z^{1+p_1} + r_2 k_1 k_2 z^{1+p_1+p_2} + \ldots + r_n k_1 \ldots k_n z^{1+p_1+\ldots+p_n}$, получаем формулы, указанные в формулировке теоремы. Строим по найденному набору числовых параметров спутниковую систему в соответствии с определением 2 и убеждаемся, что в соответствии с определением 3 данный полином является определяющим для построенной спутниковой системы. Теорема доказана.

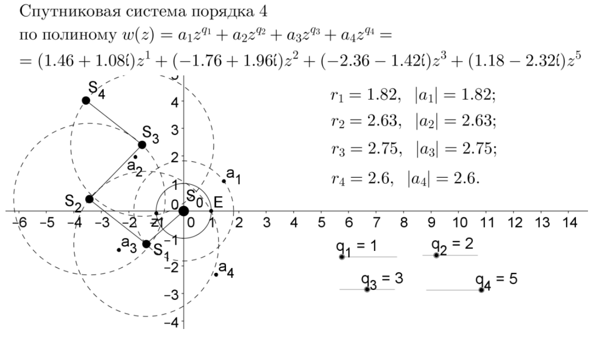

Рис. 2. Построение спутниковой системы по полиному

Теоремы 1 и 2 говорят о том, что спутниковые системы являются анимационно-геометрическими моделями полиномов при условии, что модуль переменной равен 1.

Приведем простой и естественный способ построения спутниковой системы по полиному: строим каждый его одночлен и получаем совокупность точек на концентрических окружностях. Затем последовательно складываем эти точки по правилу параллелограмма (рис. 3).

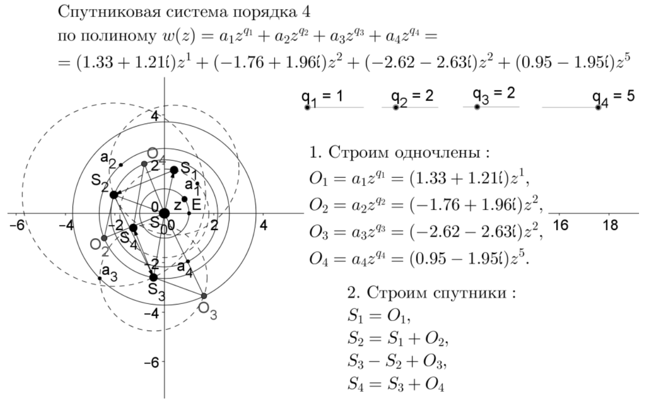

Рис. 3. Второй способ построения спутниковой системы по полиному

Определим *спутниковую систему порядка* $(n_1,...,n_m)$, как совокупность спутниковых систем порядка n_j для $j = 1,...,m$ с общей звездой. Алгебраически она описывается совокупностью определяющих многочленов составляющих ее спутниковых систем порядков n_j. На рисунке 4 изображена спутниковая система порядка (3,2), которая представляет собой объединение спутниковой системы порядка 3, состоящей из спутников O_1, O_2, O_3, и спутниковой системы порядка 2, состоящей из спутников O_1, O_4 с общей звездой O_0. Эта спутниковая система задается совокупностью двух определяющих полиномов $s(z) = r_1k_1z^{1+p_1} + r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2} + r_3k_1k_2k_3z^{1+p_1+p_2+p_3}$ и $w(z) = r_1k_1z^{1+p_1} + r_4k_1k_4z^{1+p_1+p_4}$.

Приведем пример построения спутниковой системы порядка (3,2) (рис. 4).

1. Построение исходных данных. Строим начало координат (звезду) $(0,0)$, единичную окружность и точку z на ней. На единичной окружности строим точки (комплексные числа) k_1, k_2, k_3, k_4. Ползунками вводим параметры r_1, r_2, r_3, r_4 (радиусы орбит) и p_1, p_2, p_3, p_4 (показатели вращений).

2. Построение спутников. Строкой ввода строим точки (комплексные числа) $O_1 = r_1k_1z^{1+p_1}$, $O_2 = O_1 + r_2k_1k_2z^{1+p_1+p_2}$, $O_3 = O_2 + r_3k_1k_2k_3z^{1+p_1+p_2+p_3}$, $O_4 = O_1 + r_4k_1k_4z^{1+p_1+p_4}$.

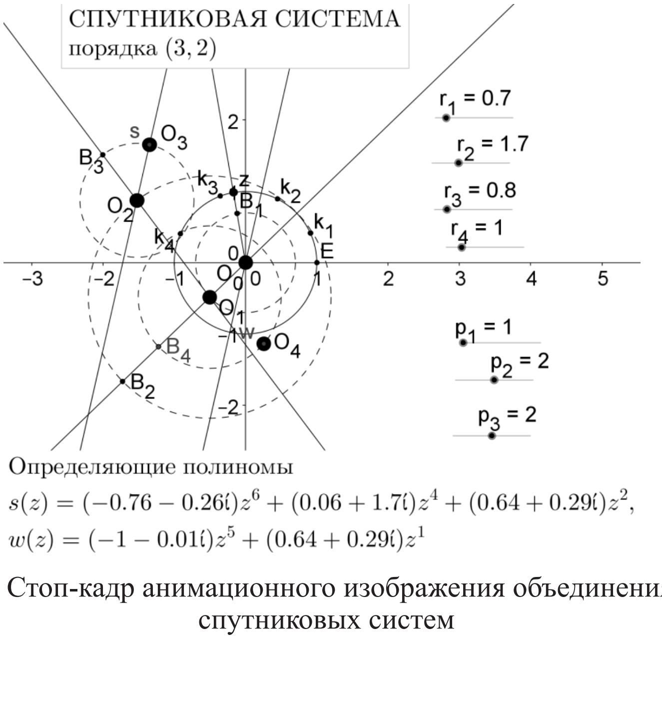

Рис. 4. Стоп-кадр анимационного изображения объединения двух спутниковых систем

При анимации точки *z* спутниковая система приходит в движение.

3. Спутниковая система в пространстве

Для алгебраического описания спутниковых систем в пространстве нам понадобятся кватернионы и связанные с ними понятия векторного умножения и скалярного умножения векторов.

Всякий кватернион (Математическая Энциклопедия, 1977, т. 2, с. 838) записывается в виде $ai+bj+ck+d$, где a, b, c, d – действительные числа, i, j, k называются мнимыми единицами и по определению удовлетворяют условию $i^2 = j^2 = k^2 = (ijk)^2 = -1$. Число d называется скалярной (или действительной) частью, а $ai+bj+ck$ векторной (или мнимой) частью кватерниона. Если $d=0$, то кватернион будем называть векторным (или вектором) и обозначать без стрелки. Кватернионы ввел английский математик Гамильтон (W.R. Hamilton, 1806 – 1868) в работе 1843 г. (Hamilton, 1853), (Hance, 1867).

В соответствии с (Математическая Энциклопедия, 1977, т. 1, с. 634 – 635), векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $[\vec{a},\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$, а скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$. Поскольку векторные кватернионы договариваемя писать без стрелок, то для них будем использовать обозначения соответственно $[a,b]$, $a\times b$, (a,b). Геометрически векторные кватернионы складываются по правилу параллелограмма. Чтобы умножить один кватернион на другой, нужно раскрыть скобки, перемножить мнимые единицы, сохраняя порядок их следования, и привести подобные. Мнимые единицы умножаются по правилам: $ij=k$, $ji=-k$; $jk=i$,, $kj=-i$; $ki=j$, $ik=-j$. Пользуясь этими правилами, для векторных кватернионов (векторов) $h=ai+bj+ck$, $h_1=a_1i+b_1j+c_1k$ имеем $hh_1=(bc_1-b_1c)i+(a_1c-ac_1)j+(ab_1-a_1b)k-aa_1-bb_1-cc_1=[h,h_1]-(h,h_1)$. Видим, что произведение векторных кватернионов есть снова векторный кватернион тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, то есть перемножаемые векторы перпендикулярны. Сами понятия векторное произведение и скалярное произведение векторов вошли в математику именно из теории кватернионов.

С этим багажом знаний перейдем к построению спутниковой системы в пространстве и ее алгебраическому описанию. Как и в случае спутниковой системы на плоскости, опишем построение спутниковой системы порядка *n* в пространстве и описание построения примем за конструктивное определение. На рисунке 5 изображено построение лишь одного спутника. Этого достаточно, чтобы построить любое количество спутников самостоятельно.

Построение спутниковой системы порядка *n* в пространстве.

Пусть даны ненулевые векторные кватерниононы $\{a_1, ..., a_n\}$ (аналоги коэффициентов многочлена, задающего спутниковую систему на плоскости) и даны натуральные числа $\{q_1, ..., q_n\}$ (показатели степеней комплекснной переменной).

1. *Построение исходных данных.* Строим данную систему векторных кватернионов $\{a_1, ..., a_n\}$ в виде точек пространства (по их координатам) и ползунками вводим показатели степеней переменной $\{q_1, ..., q_n\}$. На рисунке 5 данный кватернион изображен точкой A, показатель степени q введен ползунком.

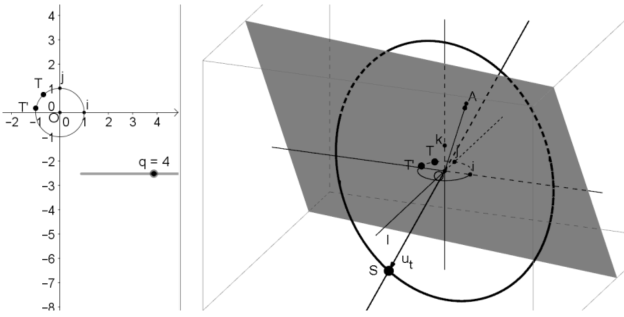

Рис. 5. Построение спутника в пространстве

2. Строим единичную сферу и единичные векторы осей координат i, j, k (на рисунке 5 сфера сделана невидимой, чтобы не заслонять главного).

Для каждого $t = 1,...,n$ выполняем следующие построения.

3. Координатную плоскость $\langle i, j \rangle$ будем рассматривать как комплексную плоскость с действительной осью абсцисс, содержашей вектор i, и мнимой осью ординат, содержащей вектор j. На этой плоскости строим единичную окружность и точку $T = z$ на ней (на рисунке 5 слева). Рассматривая z как комплексную переменную, находим угол $\varphi = \arg(z)$ и строим точку $T' = z^{q_t}$ с аргументом $\alpha_t = q_t \varphi$. При анимации точки z за время ее полного оборота по единичной окружности в координатной плоскости $\langle i, j \rangle$ точка $T' = z^{q_t}$ совершит по ней q_t оборотов.

4. Если $a_t \in \langle i, j \rangle$, то обозначим $u_t = [\ a_t \mid k, z^t]$. Если же $A = a_t \notin \langle i, j \rangle$ (рис. 5), то строим плоскость $\pi_t = \langle a_t, z^{q_t} \rangle$ по точкам O, a_t, z^{q_t}, прямую l, проходящую через точку O перпендикулярно плоскости π_t, и сферу с центром в точке O, проходящую через точку $A = a_t$. Из двух точек пересечения прямой l со сферой выбираем точку u_t так, чтобы обход точек a_t, z^{q_t}, u_t в указанном порядке был таким же, как обход по единичным точкам i, j, k (против часовой стрелки). Вектор u_t является нормальным вектором плоскости π_t.

Для алгебраического осмысления вектора u_t переводим построения на алгебраический язык. Записываем уравнение плоскости π_t по точкам $O=(0,0,0)$, $T'=z^{q_t}=(\cos(q_t\varphi),\sin(q_t\varphi),0)$, $A=a_t=(a,b,c)$ (на рисунке 5 $A=a_t=(2,-3,4)$). Уравнение имеет вид $-c\sin(q_t\varphi)\cdot x+c\cos(q_t\varphi)\cdot y+(a\sin(q_t\varphi)-b\cos(q_t\varphi))\cdot z=0$. Следовательно, нормальный вектор плоскости π_t равен $\overrightarrow{u_t}=(-c\sin(q_t\varphi),c\cos(q_t\varphi),a\sin(q_t\varphi)-b\cos(q_t\varphi))=[a_t,z^{q_t}]$. Для проверки на рисунке 5 строим точку $S=(-c\sin(q_t\varphi),c\cos(q_t\varphi),a\sin(q_t\varphi)-b\cos(q_t\varphi))$ и убеждаемся, что она совпадает с точкой u_t, построенной выше.

Обозначая значком $\times$ операцию нахождения векторного произведения двух векторных кватернионов, в первом случае получаем $u_t=[\,|a_t|k,z^{q_t}]=|a_t|k\times z^{q_t}$, а во втором $u_t=[a_t,z^{q_t}]=a_t\times z^{q_t}$. В общем случае $u_t=b_t\times z^{q_t}$, где

$$b_t=\begin{cases}|a_t|k, & \textit{если } a_t\in\langle i,j\rangle,\\ a_t, & \textit{если } a_t\notin\langle i,j\rangle.\end{cases}$$

5. Строим последовательно точки $S_0=O$, $S_1=u_1$, $S_2=S_1+u_2$, …, $S_n=S_{n-1}+u_n$ и получаем искомую пространственную систему спутников $\{S_1,\dots,S_n\}$ со звездой O. При анимации точки $T=z$ за время ее полного оборота по единичной окружности в соответствующей координатной плоскости точка S_t совершит q_t оборотов по круговой орбите радиуса $|a_t|$ вокруг S_{t-1}.

Алгебраически выражение $S_t=b_1\times z^{q_1}+\dots+b_t\times z^{q_t}$ имеет вид полинома от комплексной переменной z при условии $|z|=1$ с коэффициентами, которые представляют собой векторные кватернионы. Вместе с тем, спутниковые системы в пространстве можно рассматривать как анимационно-геометрические модели указанных полиномов.

Заключение. В чисто математическом отношении представленный материал является началом исследований спутниковых систем как анимационно-геометрических моделей полиномов, открывающий новые проблемы и перспективы, и следующая подготовленная к печати статья автора посвящена вопросам анимационно-геометрического моделирования полиномов в области кватернионов в виде спутниковых систем в пространстве. С методической точки зрения представленная в статье целесообразность использования анимационных рисунков в обучении математике как технологическая часть цифровизации образования демонстрируется в подготовленном автором к печати учебном пособии по тригонометрии 10 класса. Основное понятие тригонометрии – числовая окружность демонстрируется на анимационном рисунке в виде наматывания числовой прямой на окружность. Анимационно-геометрическая модель этого процесса ложится в основу анимационного вычерчивания графиков тригонометрических функций. Анимационными рисунками сопровождается изложение всего учебного материала по тригономерти. Альбом анимационных рисунков к учебному пособию размещен по указанному ниже адресу[1)]. Автор уверен, что в недалеком будущем анимационные рисунки войдут в арсенал средств обучения так же естественно, как ныне используются мел и шариковая ручка.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. https://www.geogebra.org/m/nsn4h2sx

ЛИТЕРАТУРА

Ларин, С. (2015). *Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики*. Ростов-на-Дону: «Легион».

Ларин, С. (2018). *Методика обучения математике. Компьютерная анимация в среде GeoGebra*. Москва: «Юрайт».

Ларин, С. (2019). Алгебраическое описание улиток Паскаля порядка *n*. *Математика и информатикя*. Volume 62, Number 5, 550 – 559.

Математическая Энциклопедия (1977). Москва: «Советская энциклопедия».

REFERENCES

Larin, S. V. (2015). *Computer animation in GeoGebra platform in mathematics classes*. Rostov-na-Donu: Legion.

Larin, S. V. (2018). *Mathematics training. Computer animation in the GeoGebra environment.* Moscow: Jright.

Larin, S. & Mayer, V. (2018). The Role of computer animation in mathematics teaching. *Mathematics and Informatics*, Volume 61, Number 6, 542 – 552.

Larin, S. (2019). Algebraic description of Pascal’s snails order *n*. *Matematics and Informatics*. Volume 62, Number 5, 550 – 559.] *Mathematical Encyclopedia* (1977). Moscow: “Soviet Encyclopedia”.

Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on qusternions*. Dublin.

Hancel, H. (1867). *Theory der complexen Zahlensysteme*. Leipzig (Voss).

SATELLITE SYSTEMS AS ANIMATION-GEOMETRIC POLYNOMIAL MODELS

Abstract. The article gives an animation-geometric representation of polynomials on the complex plane, provided that the module of the complex variable is 1, in the form of satellite systems. A similar representation in the form of spatial satellite systems is given for polynomials in a complex variable, whose coefficients are vector quaternions (their scalar part is zero). The effectiveness and feasibility of using animated drawings as a means of modern didactics in teaching mathematics is presented.

Keywords: animation figures; GeoGebra; satellite system; complex numbers; quaternions; polynoms

✉ **Prof. Sergey Larin, DSc.**
ORCID ID: 0000-0002-5900-3463
Scopus ID: 56250614800
School of Mathematics, Physics and Computer Technology
Krasnoyarsk State Pedagogical University
Krasnoyarsk, Russia
E-mail: larin_serg@mail.ru