

*School for Teachers
Училище за учители*

СПИРАЛОВИДНИЯТ ПОДХОД В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА НА ТЕМА „ФУНКЦИИ“ В ГИМНАЗИАЛНИЯ ЕТАП

Светослав Стаменов

Втора английска езикова гимназия „Томас Джеферсън“ – София

Резюме. Настоящата статия предоставя сценарий за поредица от уроци през различните класове в гимназиалния етап, в който се изучават различните видове функции и техните графики – линейна, квадратна и др. Разгледан е и графичният метод за решаване на уравнения. Показани са нови интерактивни подходи за обучението по математика, използващи мобилни технологии. Предоставени са в статията системи от задачи, които могат да бъдат използвани в учебните часове.

Keywords: script for lessons; various types of functions; graphs; graphical method for solving equations

Един често прилаган подход в обучението е изграждането на дадено понятие или система от понятия чрез многократно връщане към него или към системата от понятия на различни етапи от обучението. Този подход на обучение се нарича спираловиден и се прилага съвместно с останалите методи за обучение. Руският психолог Виготски дава следното определение за спираловидния подход в обучението: „Постепенно разширяване и усложняване на темите и тяхното съдържание“. Според американския психолог Брунер учебното съдържание трябва да бъде структурирано в спираловидна форма, така че учениците винаги да могат да се обосновават и аргументират със знанията, които имат до момента.

Пример за такъв подход в обучението по математика е изграждането на понятието число. Още в I клас учениците се запознават с целите числа от 1 до 20. Във II клас те разширяват изучаването на числата от 21 до 100, в трети клас – до 1000, а в IV клас редицата на естествените числа се разширява над 1000.

В тази статия ще разгледаме изучаването на темата „Функции“ през годините в гимназиалния етап от обучението. Основните моменти, които ще засегнем, са:

- изучаването на линейната функция в VIII клас;
- изучаването на квадратната функция в X клас;

– графично решаване на уравнения и изследване броя на решенията на параметрични уравнения в X клас профилирана подготовка;

– графично решаване на показателни и логаритмични уравнения в XI клас профилирана подготовка.

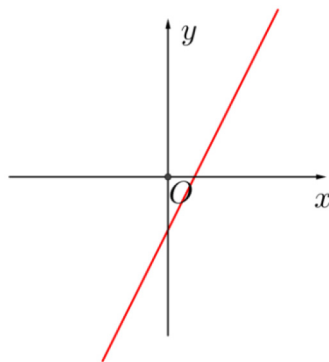
Изучаването на функция започва в VIII клас. Учителят въвежда понятието функция и понятията, свързани с него, в няколко учебни часа, след което започва изучаването на линейната функция, нейната графика и свойства. Опорните знания и умения, които учениците трябва да са придобили до учебния час, в който ще се изучава линейната функция, са:

- има представа за понятието функция и за начините за задаване на функция;
- умее да намира функционална стойност, стойност на аргумента при различно задаване на функция и да установява принадлежност на точка към графика на функция.

За този учебен час на учениците трябва да имат цветни химикалки, милиметрова хартия или тетрадка с малки квадратчета, върху които да изчертават графиките от учебния час. Учителят използва компютър, на който с помощта на GeoGebra ще въведе графиката на функцията $f(x) = ax + b$.

В началото на учебния час учителят въвежда аналитичния вид на линейната функция, понятията, свързани с коефициентите ѝ, и преминава към изчертаване на графиката на линейната функция. В учебниците по математика изчертаването на графиката на линейната функция е представено чрез съставянето на таблица, включваща произволни стойности на аргумента и намирането на функционалните ѝ стойности. Един нов интерактивен подход за изучаването на начина, по който се изчертава графиката на линейната функция, може да се представи чрез видео¹⁾. Този нов метод предоставя на учениците възможността да изчертават графиката на линейната функция, без да е нужно да съставят таблица и да пресмятат координатите на две точки, които еднозначно определят графиката ѝ.

Следващите два учебни часа учителят използва, за да могат учениците да упражнят изчертаването на графиката на линейната функция и да затвърдят този нов момент от обучението по математика. В тези часове ролята на учителя е да задава задачите за упражнение, да напътства учениците, както и да прави заключения след изчертаването на конкретната графика. Една примерна система от задачи, която може да се използва за упражняване на метода за изчертаване графика на линейната функция, е следната:



$$1 \text{ зад. } f(x) = 2x + 3$$

$$2 \text{ зад. } f(x) = 4x + 5$$

$$3 \text{ зад. } f(x) = 5x + \frac{1}{2}$$

$$4 \text{ зад. } f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

$$5 \text{ зад. } f(x) = 3x - 2$$

$$6 \text{ зад. } f(x) = x - 4$$

$$7 \text{ зад. } f(x) = 2x - \frac{3}{2}$$

$$8 \text{ зад. } f(x) = \frac{1}{2}x - 5$$

$$9 \text{ зад. } f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}$$

$$10 \text{ зад. } f(x) = -4x + 1$$

$$11 \text{ зад. } f(x) = -2x + 3$$

$$12 \text{ зад. } f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$13 \text{ зад. } f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$$

$$14 \text{ зад. } f(x) = -4x - 1$$

$$15 \text{ зад. } f(x) = -2x - 3$$

$$16 \text{ зад. } f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

$$17 \text{ зад. } f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}$$

$$18 \text{ зад. } f(x) = (x-1)^2 - (x-7)(x-3)$$

$$19 \text{ зад. } f(x) = \frac{x-1}{7} - \frac{5-12x}{14}$$

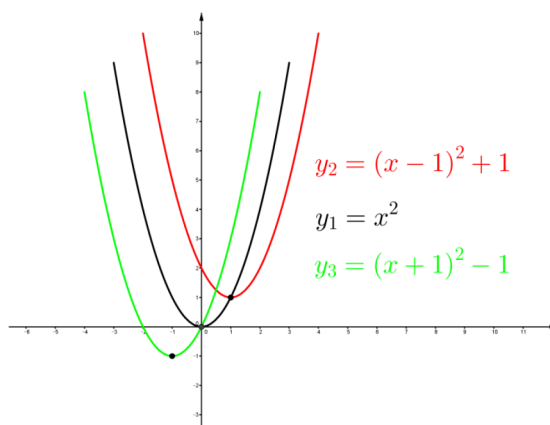
$$20 \text{ зад. } f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - (-x-2)^2 + \frac{2}{3}x^2$$

След провеждането на тази серия от учебни часове учениците трябва да покрият резултата, записан в учебната програма по математика за VIII клас, а именно „знае линейна функция и умее да чертае графиката ѝ“.

Следващата функция, която се изучава в училищния курс по математика, е квадратната. Функцията

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

се изучава в X клас ЗП и ПП. В един учебен час учителят въвежда аналитичния вид на квадратната функция и понятията, свързани с нея. Предварително учителят съставя алгоритъм за изчертаването на графиката на квадратната функция, който раздава на учениците в часа, и следвайки го, изчертава графиката на квадратната функция на дъската.



Алгоритъм за построяване на графика на квадратна функция

$$\text{Общ вид: } f(x) = ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

- 1) Определяме координатите x_0 и y_0 на върха V на параболата.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ и } y_0 = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- 2) В координатната система се построява точката $V(x_0; y_0)$
- 3) Определя се накъде е отворена параболата в зависимост от знака на a
Ако $a > 0$ – отворена нагоре
Ако $a < 0$ – отворена надолу

- 4) Построява се оста на симетрия на параболата $s \begin{cases} \in V \\ \parallel Oy \end{cases}$

- 5) Построяват се други характерни точки от параболата в координатната система. Най-често това са точките (ако има такива), в които графиката на функцията пресича абсцисната и ординатната ос:

$$P_1(x_1; f(x_1))$$

$$P_1(x_2; f(x_2))$$

$$P_3(0; f(0) = c)$$

- 6) Отбелязаните точки се съединяват с плавна линия

Часът продължава с видео²⁾. Ролята на учителя е да направи обобщение и да поставя задачи за решаване на учениците. Той контролира тяхната работа, напътства ги и при нужда коригира тяхното решение по време на урока. Една примерна система от задачи, служеща за упражняване и затвърждаване на метода за изчертаване графиката на квадратната функция, е следната:

1 зад. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

2 зад. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

3 зад. $f(x) = x^2 + 2x + 3$

4 зад. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

5 зад. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1$

Следващите два учебни часа е препоръчително учителят да отдели за упражнение върху изчертаването на графиката на квадратната функция. След тази серия от уроци учениците трябва да покрият резултата, записан в учебната програма по математика за X клас ЗП и ПП – „умее да построява с елементарни средства графика на квадратна функция“.

В X клас ПП учениците трябва да могат да решават графично уравнения и да изследват броя на решенията на параметрични уравнения. Това са поредица от уроци за упражнение, в които не се въвеждат нови знания, а се развиват уменията на учениците да чертаят графики на функции и да ги разчитат. Основната цел на тези уроци е да дадат една перспектива за изученото до момента за квадратната функция и за взаимното положение на две графики върху координатната система. За графично решаване на уравнения в учебната програма са записани:

– Цел – „усвояване на свойствата на квадратната функция и на графичния подход като метод на разсъждение“.

– Стандарт – „умее да построява графика на квадратна функция и да я използва“.

– Очаквани резултати от обучението – „умее да използва графики на функции за решаване на уравнения със или без параметър“ и „умее да използва нагледните възможности на графичния метод в конкретни ситуации“.

– Опорните знания и умения, които учениците трябва да имат, са:

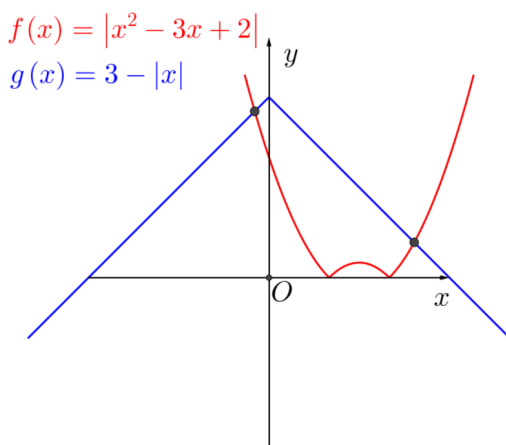
– знае линейната функция и умее да чертае графиката ѝ;

– умее да построява с елементарни средства графика на квадратна функция;

– умее да построява графика на квадратна функция и на функция, зададена с модули чрез основните трансформации.

С помощта на GeoGebra и използването на функцията „анимация“, която се предлага в този софтуерен продукт, представянето на изследване броя на решенията на параметрично уравнение става по-лесно и достъпно за учени-

ците. Добра педагогическа практика е серията от уроци да се проведе в учебна стая, оборудвана с таблети. По този начин ще се даде възможност всеки ученик сам да изследва броя на решенията на дадено параметрично уравнение чрез подходяща анимация на слайдер в GeoGebra. С използването на таблети учениците ще могат да развиват две ключови компетентности, записани в Закона за предучилищното и училищното образование – дигитална компетентност и математическа компетентност.



Примерна система от задачи, която да подпомогне работата на учителя, е:

1 зад. Да се реши уравнението $|x^2 - 4x + 3| = 3 - |x|$.

2 зад. Да се реши уравнението $|x^2 + 4x + 3| = 3 - |x|$.

3 зад. Да се реши уравнението $|x^2 + 4x + 3| = 1 - |x + 2|$.

4 зад. Да се реши уравнението $|x^2 + 4x + 3| = 5 - |x + 2|$.

5 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $|x - 2| - 1 = a$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

6 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $|x^2 - 4x + 3| = a$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

7 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $|x^2 - 2x - 3| = a$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

8 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $|x^2 - 6x - 7| + 1 = a$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

9 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $|x - 2| = ax$

в зависимост от стойностите на параметъра a .

10 зад. За кои стойности на параметъра a уравнението $|2x^2 - 4x| = a$ има четири различни корена?

11 зад. За кои стойности на параметъра a уравнението $|x - 1| = ax$ има точно две решения?

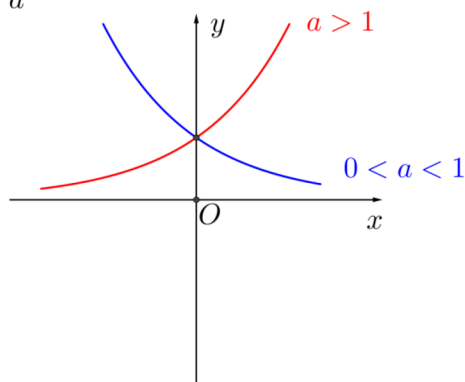
12 зад. За кои стойности на параметъра a уравнението $|x^2 - 5x + 6| = ax$ има три различни корена?

След провеждането на тези уроци учениците трябва да покрият резултатите „умее да използва графики на функции за решаване на уравнения със или без параметър“ и „умее да използва нагледните възможности на графичния метод в конкретни ситуации“, записани в учебната програма за X клас ПП.

В XI клас ПП учениците изучават графично решаване на уравнения и неравенства, свързани с показателни и логаритмични уравнения. Опорните знания и умения, необходими за учебния час, са:

- знае понятието показателна функция, графиката ѝ и умее да я използва за определяне свойствата на функцията и да ги прилага;
- знае понятието логаритмична функция, графиката ѝ и умее да я използва за определяне свойствата на функцията и да ги прилага;
- умее да построява графики на показателна и логаритмична функция чрез основните трансформации.

$$y = a^x$$



Примерна система от задачи за графично решаване на показателни и логаритмични уравнения е следната:

1 зад. Да се определи броят на корените на уравнението $2^x = -\frac{3}{2}x + 3$.

2 зад. Да се определи броят на корените на уравнението $\log_3 x = -\frac{x}{2} + 1$.

3 зад. Да се определи броят на корените на уравнението $\log_2 x = x^2 - 5x + 6$.

4 зад. Да се определи броят на решенията на уравнението $2^x = a$ в зависимост от стойностите на параметъра a .

След провеждането на учебния час учениците трябва да са покрили резултата от учебната програма по математика за XI клас ПП, а именно „умее да намира стойност на параметър при предварително зададени условия в показателни и логаритмични уравнения и неравенства“.

Идеите, които сме разгледали, се фокусират върху различните дейности, които се извършват в учебните часове през годините, когато се изучават функции. Ролята на учителя в часа е медиатор. Той поставя учениците в центъра на събитията през урока, поставя ги в ситуации, използвайки нови мобилни технологии, да откриват свойствата и закономерностите на изучаваните функции. Индиректно учениците развиват математическа компетентност и основни компетентности в областта на природните науки и на технологиите. Както знаем от Европейската референтна рамка с ключови компетентности, математическата

компетентност е способността да се развие и прилага математическо разсъждаване за решаване на различни проблеми в ежедневиия живот. Математическата компетентност включва способността и желанието да се използват математически методи на мислене и разсъждение в ежедневи ситуации. С внедряването на ИКТ в учебния час се създава нова атмосфера, където най-важните елементи са културът към знанието и критичното мислене на учениците.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. <https://www.youtube.com/watch?v=2BHzXItkByU>
2. <https://www.youtube.com/watch?v=X79b8mXsRak>
3. Закон за предучилищното и училищното образование, 13 октомври 2015 год.
4. Стратегия за ефективно прилагане на информационни и комуникационни технологии в образованието и науката на Република България (2014 – 2020 год.), 31 януари 2014 год.
5. Учебна програма по математика за VIII клас, <<http://www.mon.bg/?h=downloadFile&fileId=643>>, 23 февруари 2016 год.
6. Учебна програма по математика за X клас, <<http://www.mon.bg/?h=downloadFile&fileId=737>>, 23 февруари 2016 год.
7. Учебна програма по математика за XI клас, <<http://www.mon.bg/?h=downloadFile&fileId=773>>, 23 февруари 2016 год.
8. GeoGebra v 5.0.207.0-3D software, <<https://www.geogebra.org/>>, 20 февруари 2016 г.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

- Petkova, S., Ganchev, G. i dr. (2009). *Matematika za VIII klas*. Sofia: Prosveta [Петкова, С., Ганчев, Г. и др. (2009). *Математика за VIII клас*. София: Просвета]
- Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2009). *Matematika za VIII klas*. Sofia: Anubis [Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2009). *Математика за VIII клас*. София: Анубис]
- Paskaleva, Z., Paskalev, G. & Alashka, M. (2009). *Matematika za VIII klas*. Sofia: Arhimed [Паскалева, З., Паскалев, Г. & Алашка, М. (2009). *Математика за VIII клас*. София: Архимед]
- Zapryanov, Z., Ganchev, G. & Georgiev, I. (2012). *Matematika za X klas zadalzhitelna podgotovka*. Sofia: Prosveta [Запрянов, З., Ганчев, Г. & Георгиев, И. (2012). *Математика за X клас задължителна подготовка*. София: Просвета]
- Zapryanov, Z., Ganchev, G. & Georgiev, I. (2002). *Matematika za X klas profilirana podgotovka*. Sofia: Prosveta [Запрянов, З., Ганчев, Г. & Ге-

- оргиев, И. (2002). *Математика за X клас профилирана подготовка*. София: Просвета]
- Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2001). *Matematika za X klas profilirana podgotovka*. Sofia: Anubis [Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2001). *Математика за X клас профилирана подготовка*. София: Анубис]
- Petkova, St., Petkov, P. & Prodanova, Kr. (2001). *Matematika za XI klas profilirana podgotovka*. Sofia: Prosveta [Петкова, Ст., Петков, П. & Проданова, Кр. (2001). *Математика за XI клас профилирана подготовка*. София: Просвета]
- Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2001). *Matematika za XI klas profilirana podgotovka*. Sofia: Anubis [Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2001). *Математика за XI клас профилирана подготовка*. София: Анубис]
- Ganchev, I., Kolyagin, Yu., Kuchinov, Y., Portev, L. & Sidorov, Yu. (1996). *Metodika na obuchenieto po matematika ot VIII do XI klas I chast, Modul* [Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л. & Сидоров, Ю. (1996). *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас I част, Модул*
- Ganchev, I., Kolyagin, Yu., Kuchinov, Y., Portev, L. & Sidorov, Yu. (1998). *Metodika na obuchenieto po matematika ot VIII do XI klas II chast, Modul* [Ганчев, И., Колягин, Ю., Кучинов, Й., Портев, Л. & Сидоров, Ю. (1998). *Методика на обучението по математика от VIII до XI клас II част, Модул*

THE HELICAL APPROACH ON “FUNCTIONS” MATHEMATICS TRAINING IN THE HIGH SCHOOL STAGE

Abstract. The article presents a script for lessons in the different high school grades in which various types of functions and their graphs are taught – linear, quadratic, etc. Another focus of the article is the graphical method for solving equations. New interactive approaches (which include the use of mobile technologies) to teaching Mathematics are also demonstrated. The article provides systems of mathematical problems which can be used in the classes.

✉ **Mr. Svetoslav Stamenov**

Mathematics Teacher

2nd English Language High School “Thomas Jefferson”

Sofia, Bulgaria

E-mail: slavi17@abv.bg