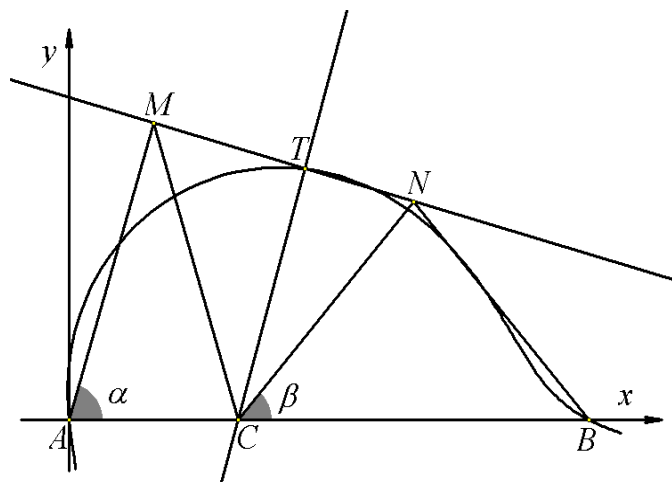


РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2016

Задача 1. Върху правата AB е взета произволна точка C . Точките M и N лежат в една полуравнина спрямо AB и са такива, че ACM и CBN са равностранни триъгълници. Ако T е петата на перпендикуляра, спуснат от C към MN , да се намери геометричното място на точката T , когато C описва AB .

Ксения Горская, Дарья Коптева, Даниил Микуров, Архангелск, Русия

Решение: ще разгледаме по-общия случай, в който триъгълниците ACM и CBN са равнобедрени с ъгли при основите AC и BC съответно равни на α и β .



Разглеждаме правоъгълна координатна система Axy , при която $A(0,0)$, $B(0,c)$, $C(c_0,0)$. Тогава $M\left(\frac{c_0}{2}, \frac{c_0}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$ и $N\left(\frac{c+c_0}{2}, \frac{c-c_0}{2} \operatorname{tg} \beta\right)$. Оттук намираме уравнението на правата MN във вида

$$2[c_0 \operatorname{tg} \alpha - (c - c_0) \operatorname{tg} \beta]x + 2cy - c_0[(c + c_0) \operatorname{tg} \alpha - (c - c_0) \operatorname{tg} \beta] = 0$$

Това уравнение записваме по следния начин:

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)c_0^2 + [c(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta) - 2(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)x]c_0 - 2c(y - \operatorname{tg} \beta x) = 0.$$

От условието, че правата CT е перпендикулярен на MN , получаваме уравнението на правата CT във вида $cx + [c \cdot \operatorname{tg} \beta - c_0 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)]y - cc_0 = 0$.

Оттук следва, че $c_0 = \frac{c(x + \operatorname{tg} \beta \cdot y)}{c + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)y}$. Точката T лежи едновременно върху правите MN и CT . Затова заместваме последния израз за c_0 в предишното равенство относно c_0 и след известни преобразувания получаваме, че координатите (x, y) на T удовлетворяват следващото уравнение от трета степен:

$$2\operatorname{tg} \beta \cdot x^3 - 2\operatorname{tg}^2 \beta \cdot y^3 + 2[2\operatorname{tg}^2 \beta - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 - 1]x^2y + 2\operatorname{tg} \beta [2\operatorname{tg}^2 \beta - (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2 - 2]xy^2 - c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)x^2 + c \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)y^2 + c(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)xy + c^2(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)x + c^2 \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)y = 0.$$

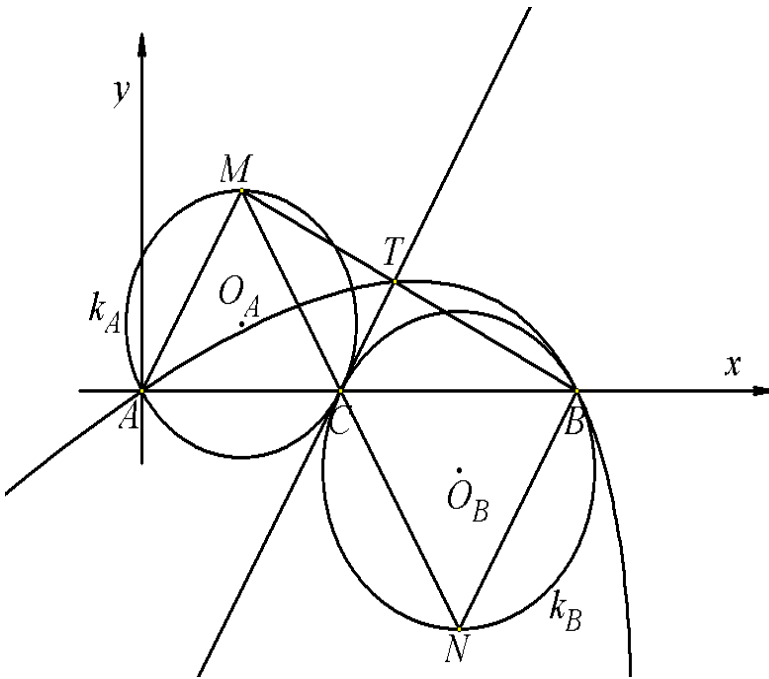
Следователно търсеното геометрично място е част от крива от трета степен. Случаят, в който $\alpha = \beta = 60^\circ$, уравнението на кривата от трета степен е следното:

$$2\sqrt{3}x^3 - 6y^3 - 14x^2y - 22\sqrt{3}xy^2 - 2\sqrt{3}cx^2 + 6cy^2 = 0.$$

Задача 2. Върху отсечката AB е взета произволна точка C . Точките M и N лежат в различни полуравнини относно AB и са такива, че ACM и CBN са равнострани триъгълници. Ако T е пресечната точка на общата допирателна в C за описаните окръжности на триъгълниците ACM и CBN с отсечката BM , да се намери геометричното място на точката T , когато C описва AB .

Еркен Мудебаев, Казбек Мухамбетов, Адилбек Темирханов,
Актау, Казахстан

Решение: разглеждаме правоъгълна координатна система Axy , при която $A(0,0)$, $B(0,c)$, $C(c_0,0)$. Тогава $M\left(\frac{c_0}{2}, \frac{c_0\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N\left(\frac{c+c_0}{2}, \frac{(c-c_0)\sqrt{3}}{2}\right)$.



Нека k_A и k_B са описаните окръжности съответно за триъгълниците ACM и BCN . Общата допирателна t на k_A и k_B в C е успоредна на AM и BN . Оттук намираме, че уравнението ѝ е $t: 3x - \sqrt{3}y - 3c_0 = 0$. От друга страна, уравнението на BM е $BM: c_0\sqrt{3}x - (c_0 - 2c)y - c_0c\sqrt{3} = 0$. От уравненията на BM и t намираме координатите (x, y) на пресечната им точка T чрез равенствата $x = \frac{c_0(3c - c_0)}{2\sqrt{3}c}$ и $y = \frac{3c_0(c - c_0)}{2\sqrt{3}c}$. Оттук следва, че $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}(3c - c_0)}{3(c - c_0)}$ и $c_0 = \frac{3(x - \sqrt{3}y)c}{3x - \sqrt{3}y}$. Заместваме получената стойност на c_0 в координатата x на T и след някои преобразувания получаваме, че координатите (x, y) на T удовлетворяват уравнението $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy - 3cx + 3\sqrt{3}cy = 0$. В това уравнение извършваме смяна на x и y с X и Y чрез равенствата $x = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y + \frac{27}{32}c$ и $y = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y + \frac{3\sqrt{3}}{2}c$. Получаваме $4Y^2 + 3cX = 0$, което е уравнение на парабола. Следователно търсеното гео-

метрично място е част от парабола.

Задача 3. Дадени са $\triangle ABC$ и точки A_0 , B_0 и C_0 , лежащи съответно върху страните BC , CA и AB . Вътрешно за $\triangle ABC$ са построени равнобедрените триъгълници BA_0M_a , CB_0M_b и AC_0M_c с ъгли при основите BA_0 , CB_0 и AC_0 , равни на α_0 . Аналогично вътрешно за $\triangle ABC$ са построени равнобедрените триъгълници CA_0N_a , AB_0N_b и BC_0N_c с ъгли при основите CA_0 , AB_0 и BC_0 , равни на β_0 . Точките T_a , T_b и T_c са вътрешни за отсечките M_aN_a ,

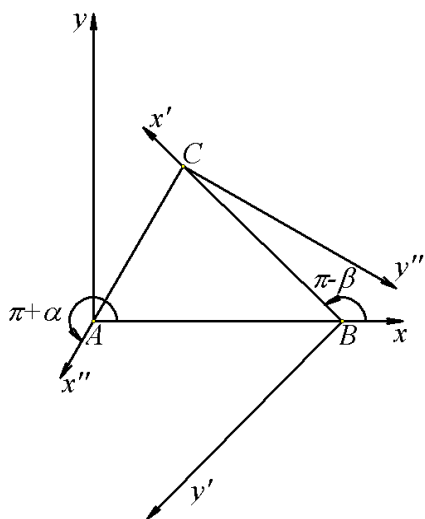
M_bN_b и M_cN_c и такива, че $\frac{M_aT_a}{N_aT_a} = \frac{\cos \alpha_0 \cdot A_0M_a}{\cos \beta_0 \cdot A_0N_a}$, $\frac{M_bT_b}{N_bT_b} = \frac{\cos \alpha_0 \cdot B_0M_b}{\cos \beta_0 \cdot B_0N_b}$,

$\frac{M_cT_c}{N_cT_c} = \frac{\cos \alpha_0 \cdot C_0M_c}{\cos \beta_0 \cdot C_0N_c}$. Когато A_0 , B_0 и C_0 се движат по BC , CA и AB , точките T_a , T_b и T_c описват съответно геометричните места π_a , π_b и π_c . Да се докаже, че:

- геометричните места π_a , π_b и π_c са части от параболи;
- ако V_a , V_b и V_c са върховете на параболите π_a , π_b и π_c , правите AV_a , BV_b и CV_c се пресичат в една точка или са успоредни.

Лили Стефанова, Ирина Христова, Радина Иванова, Ловеч, България

Решение: нека Oxy и $O_1X_1Y_1$ са две еднакво ориентирани координатни системи в равнината. Ако ъгълът, на който трябва да се завърти оста Ox около O в посока, обратна на часовниковата стрелка, докато посоката на



$Ox^{\rightarrow}$ съвпадне с посоката на $O_1X^{\rightarrow}$, е равен на $\vartheta \in [0, \pi]$, а координатите на O_1 спрямо Oxy са (x_0, y_0) , то координатите (X, Y) на P спрямо $O_1X_1Y_1$ и координатите (x, y) на точка P спрямо Oxy са свързани с равенствата: $X = \cos \vartheta \cdot (x - x_0) + \sin \vartheta \cdot (y - y_0)$ и $Y = -\sin \vartheta \cdot (x - x_0) + \cos \vartheta \cdot (y - y_0)$.

Нека в дадения триъгълник ABC , както обикновено, имаме $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. Разглеждаме положително ориентирани координатни системи Axy , $Bx'y'$ и $Cx''y''$ (вж. фигурата). Спрямо Axy координатите на върховете на $\triangle ABC$ са

следните $A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(b.\cos\alpha, b.\sin\alpha)$. Нека произволна точка P от равнината на $\triangle ABC$ има координати (x,y) , (x',y') и (x'',y'') съответно спрямо $Axу$, $Bx'y'$ и $Cx''y''$. Тези координатни системи са еднакво ориентирани. Освен това спрямо $Axу$ за $Bx'y'$ е изпълнено $\vartheta = \pi - \beta$, а за $Cx''y''$ е изпълнено $\vartheta = \pi + \alpha$. След използване на споменатите връзки между координатите при преминаване към координатната система $Axу$ получаваме равенствата: $x' = -\cos\beta.(x-c) + \sin\beta.y$, $y' = -\sin\beta.(x-c) - \cos\beta.y$, $x'' = -\cos\alpha.(x-b\cos\alpha) - \sin\alpha.(y-b\sin\alpha)$, $y'' = \sin\alpha.(x-b\cos\alpha) - \cos\alpha.(y-b\sin\alpha)$. В статията „Некоторые траектории, которые определены равнобедренными треугольниками“, публикувана в брой 6, 2016 г., е доказано, че при произволни стойности на α_0 и β_0 и $\frac{M_c T_c}{N_c T_c} = k \cdot \frac{C_0 M_c}{C_0 N_c}$ ($k \neq 0$), когато точката C_0 описва отсечката AB , точката

T описва крива от втора степен, която спрямо $Axу$ има уравнение:

$$(\sin\alpha_0 - k\sin\beta_0)^2 x^2 - (\cos\alpha_0 + k\cos\beta_0)^2 y^2 - \\ - c(\sin\alpha_0 - k\sin\beta_0)^2 x + c(\sin\alpha_0 - k\sin\beta_0)(\cos\alpha_0 - k\cos\beta_0)y = 0.$$

В същата статия е показано, че тази крива е парабола тогава и само тогава, когато $k = -\frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}$. При тази стойност на k получаваме уравнението

$$(tg\alpha_0 + tg\beta_0)x^2 - (tg\alpha_0 + tg\beta_0)x + 2c.y = 0. \text{ Полагаме } t = \frac{1}{2}(tg\alpha_0 + tg\beta_0)$$

и получаваме $\pi_c : y = -\frac{t}{c}.x^2 + t.x$. Аналогично спрямо координатните системи $Bx'y'$ и $Cx''y''$ се получават съответно параболите $\pi_a : y' = -\frac{t}{a}.x'^2 + t.x'$ и $\pi_b : y'' = -\frac{t}{b}.x''^2 + t.x''$. Оттук следва твърдение а) на задачата.

Върхът на произволна парабола $Y = a_0 X^2 + a_1 X + a_2$ спрямо координатна система OXY има следните координати $\left(-\frac{a_1}{2a_0}, \frac{3a_1^2}{4a_0} + a_2\right)$. Оттук за координатите на върховете V_a , V_b и V_c съответно на параболите π_a , π_b и π_c спрямо собствените им координатни системи $Bx'y'$, $Cx''y''$ и $Axу$ имаме $V_a\left(\frac{a}{2}, \frac{t}{4}.a\right)$, $V_b\left(\frac{b}{2}, \frac{t}{4}.b\right)$ и $V_c\left(\frac{c}{2}, \frac{t}{4}.c\right)$. От връзките между координатите (x',y') и (x'',y'') с (x,y) получаваме, че координатите на V_a и V_b спрямо $Axу$ се изразяват по следния начин:

$$V_a \left(c - \frac{a}{2} \cdot \cos \beta - t \cdot \frac{a}{4} \cdot \sin \beta, \frac{a}{2} \cdot \sin \beta - t \cdot \frac{a}{4} \cdot \cos \beta \right),$$

$$V_b \left(\frac{b}{2} \cdot \cos \alpha + t \cdot \frac{b}{4} \cdot \sin \alpha, \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha - t \cdot \frac{b}{4} \cdot \cos \alpha \right)$$

От координатите на върховете на триъгълника и върховете на параболите намираме уравненията на правите AV_a , BV_b и CV_c в следния вид:

$$AV_a : a(2 \sin \beta - t \cos \beta)x + (2a \cos \beta + ta \sin \beta - 4c)y = 0, BV_b :$$

$$b(2 \sin \alpha - t \cos \alpha)x - (2b \cos \alpha + tb \sin \alpha - 4c)y - bc(2 \sin \alpha - t \cos \alpha) = 0,$$

$$CV_c : (4b \sin \alpha - tc)x - 2(2b \cos \alpha - c)y - bc(2 \sin \alpha - t \cos \alpha) = 0.$$

Тъй като $bc \sin \alpha = ac \sin \beta = 2S$ (S е лицето на ABC),
 $\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{ac}$, $\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$, последните уравнения се преобразуват във вида:

$$AV_a : [8S - (a^2 - b^2 + c^2)t]x + 2(2St + a^2 - b^2 - 3c^2)y = 0, BV_b :$$

$$[8S - (-a^2 + b^2 + c^2)t]x - (2St - a^2 + b^2 - 3c^2)y - c[8S - (-a^2 + b^2 + c^2)t] = 0,$$

$$CV_c : 2(8S - c^2t)x + 4(a^2 - b^2)y - c[8S - (-a^2 + b^2 + c^2)t] = 0.$$

От уравненията на правите AV_a и BV_b намираме, че ако те имат пресечна точка V , тя има следните координати:

$$x_V = \frac{[(-a^2 + b^2 + c^2)t - 8S](2St + a^2 - b^2 - 3c^2)}{4c[St^2 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 12S]},$$

$$y_V = \frac{[(-a^2 + b^2 + c^2)t - 8S][(a^2 - b^2 + c^2)t - 8S]}{8c[St^2 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 12S]}.$$

Точката V съществува тогава и само тогава, когато $St^2 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 12S \neq 0$. С непосредствено заместване на последните равенства в лявата част на уравнението на CV_c се установява, че то се превръща във вярно равенство, т.е. правата CV_c минава през V . Следователно правите AV_a , BV_b и CV_c се пресичат в точката V , когато $St^2 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 12S \neq 0$. Ако е изпълнено равенството $St^2 - (a^2 + b^2 + c^2)t + 12S = 0$, тези прави са

успоредни. Разглеждайки последното равенство като уравнение по отношение на t , получаваме, че то има следните реални положителни корени:

$$t_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}{2S}.$$

Намерените стойности за t показват, че при фиксиран $\triangle ABC$ съществуват два случая, при които правите AV_a , BV_b и CV_c са успоредни. В останалите случаи за същия триъгълник тези прави се пресичат в една точка V , чиито координати са получени по-горе. Тези изводи могат да се забележат на предложените фигури.

