

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2015

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - mx + n$, където $m, n \in \mathbb{N}$. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$ и е изпълнено $\frac{f(-2)}{x_1 + x_2} = \frac{f(-3)}{x_1 x_2} = t \in \mathbb{N}$, да се намерят m и n .

Росен Николаев, Варна

Решение: от формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = m$ и $x_1 x_2 = n$. Тогава от условието $\frac{f(-2)}{x_1 + x_2} = \frac{f(-3)}{x_1 x_2} = t \in \mathbb{N}$ следва $\frac{4 + 2m + n}{m} = \frac{9 + 3m + n}{n} = t$. От-

$$\text{тук } \begin{cases} \frac{4 + 2m + n}{m} = t \\ \frac{9 + 3m + n}{n} = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} m = \frac{4t + 5}{t^2 - 3t - 1} \\ n = \frac{9t - 6}{t^2 - 3t - 1} \end{cases}. \text{ Тъй като } m \text{ и } n \text{ са естествени числа,}$$

$$\text{то } \begin{cases} \frac{4t + 5}{t^2 - 3t - 1} \geq 1 \\ \frac{9t - 6}{t^2 - 3t - 1} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left[\frac{7 - \sqrt{73}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{7 + \sqrt{73}}{2} \right] \\ t \in \left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}, 6 - \sqrt{31} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{13}}{2}, 6 + \sqrt{31} \right] \end{cases}.$$

Като се вземе предвид, че t също е естествено число, се получава $t \in \{4; 5; 6; 7\}$. С непосредствена проверка се установява, че при $t = 4$ имаме $m = 7$ и $n = 10$.

Задача 2. Окръжност k с център O се допира до правата c в точка M . Точките A и B лежат върху c така, че M е между A и B . През точките A и B са построени допирателните a и b към k , които се пресичат в точка C . Ако $AM = m$, $BM = n$ и лицето на $\triangle ABC$ е равно на $AM \cdot BM$, да се намери дължината на OC .

Милен Найденов, Варна

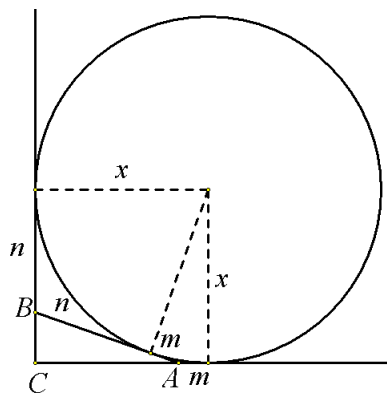
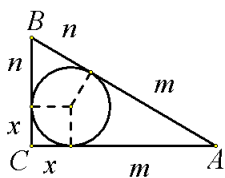
Решение: за елементите на $\triangle ABC$ ще използваме обичайните означения. От Хероновата формула за $\triangle ABC$ имаме $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ и от условието $S = m.n = (p-a)(p-b)$ следва, че $S = p(p-c)$. Затова $(p-a)(p-b) = p(p-c)$, което води до равенството $a^2 + b^2 = c^2$. Следователно ABC е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха C . Тъй като OC е диагонал на квадрат със страна x , равна на радиуса на окръжността, то $OC = x\sqrt{2}$. Възможни са два случая.

Първи случай: $(x+m)(x+n) = 2S = 2mn$. Оттук

$$x = \frac{-m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2} \text{ и } OC = \frac{-m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{\sqrt{2}}.$$

Втори случай: $(x-m)(x-n) = 2S = 2mn$. Оттук

$$x = \frac{m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2} \text{ и } OC = \frac{m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{\sqrt{2}}.$$



Задача 3. Дадени са $\triangle ABC$ и точка P от равнината му. Нека $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Описаните окръжности на триъгълниците ABB_1 и ACC_1 се пресичат за втори път в точката Q_a . Аналогично се получават точките Q_b и Q_c . Да се докаже, че правите AQ_a , BQ_b и CQ_c се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: ще решим задачата с помощта на барицентрични координати спрямо $\triangle ABC$, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $P(\lambda, \mu, \nu)$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$). Първо да отбележим, че $A_1\left(0, \frac{\mu}{1-\lambda}, \frac{\nu}{1-\lambda}\right)$, $B_1\left(\frac{\lambda}{1-\mu}, 0, \frac{\nu}{1-\mu}\right)$, $C_1\left(\frac{\lambda}{1-\nu}, \frac{\mu}{1-\nu}, 0\right)$. За по-кратко в координатите на точките B_1 и C_1 ще използваме означенията $x_b = \frac{\lambda}{1-\mu}$ и $x_c = \frac{\lambda}{1-\nu}$. Уравненията на симетралите на отсечките AB и AB_1 са съответно $c^2x - c^2y + (a^2 - b^2)z = 0$ и $2b^2x + (a^2 + b^2 - c^2)y - (1 + x_b)b^2 = 0$, където a , b и c са страните на $\triangle ABC$. От тези уравнения намираме координатите (x_1, y_1, z_1) на центъра на описаната около $\triangle ABB_1$ окръжност във вида:

$$x_1 = \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2)x_b}{16S^2},$$

$$y_1 = \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2) + b^2(-a^2 + b^2 + c^2)x_b}{16S^2}, \quad z_1 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2) - 2b^2c^2x_b}{16S^2},$$

където $16S^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ (S е лицето на $\triangle ABC$).

Аналогично определяме координатите (x_2, y_2, z_2) на центъра на описаната около $\triangle ACC_1$ окръжност във вида:

$$x_2 = \frac{a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)x_c}{16S^2},$$

$$y_2 = \frac{b^2(a^2 - b^2 + c^2) - 2b^2c^2x_c}{16S^2},$$

$$z_2 = \frac{c^2(a^2 + b^2 - c^2) + c^2(-a^2 + b^2 + c^2)x_c}{16S^2}.$$

Уравненията на описаните около триъгълниците ABB_1 и ACC_1 окръжности са съответно

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + [-c^2x_1 + c^2y_1 + (b^2 - a^2)z_1]y + [-b^2x_1 + (c^2 - a^2)y_1 + b^2z_1]z = 0,$$

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy + [-c^2x_2 + c^2y_2 + (b^2 - a^2)z_2]y + [-b^2x_2 + (c^2 - a^2)y_2 + b^2z_2]z = 0.$$

От намерените координати на центровете на тези окръжности последните уравнения се превръщат в съответни равенства $a^2yz + b^2zx + c^2xy - b^2x_bz = 0$

и $a^2 yz + b^2 zx + c^2 xy - c^2 x_c y = 0$. След почленното изваждане на тези равенства получаваме $c^2 x_c y - b^2 x_b z = 0$. Оттук имаме $z = \frac{c^2 x_c}{b^2 x_b} y$. От това равенството изразяванията на x_b и x_c , равенството $x = 1 - y - z$ и уравнението на една от окръжностите получаваме, че координатите (x_A, y_A, z_A) на пресечната точка Q_a на окръжностите, която е различна от A , се изразяват със следните равенства:

$$\begin{aligned} x_A &= [-a^2(1-\mu)(1-\nu) + b^2\lambda(1-\nu) + c^2\lambda(1-\mu)]/\tau_A, \\ y_A &= b^2(1-\nu)/\tau_A, \quad z_A = c^2(1-\mu)/\tau_A, \quad \text{където} \\ \tau_A &= -a^2(1-\mu)(1-\nu) + b^2(1+\lambda)(1-\nu) + c^2(1+\lambda)(1-\mu). \end{aligned}$$

Аналогично, ако (x_B, y_B, z_B) и (x_C, y_C, z_C) , се получават равенствата:

$$\begin{aligned} x_B &= a^2(1-\nu)/\tau_B, \quad y_B = [a^2\mu(1-\nu) - b^2(1-\nu)(1-\lambda) + c^2\mu(1-\lambda)]/\tau_B \\ z_B &= c^2(1-\lambda)/\tau_B, \\ x_C &= a^2(1-\mu)/\tau_C, \quad y_C = b^2(1-\lambda)/\tau_C, \\ z_C &= [a^2\nu(1-\mu) + b^2\nu(1-\lambda) + c^2(1-\lambda)(1-\mu)]/\tau_C, \end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned} \tau_B &= a^2(1+\mu)(1-\nu) - (1-\nu)(1-\lambda) + (1+\mu)(1-\lambda), \\ \tau_C &= a^2(1+\nu)(1-\mu) + b^2(1+\nu)(1-\lambda) - c^2(1-\lambda)(1-\mu). \end{aligned}$$

Сега намираме уравненията на правите AQ_a , BQ_b и CQ_c във вида:

$$AQ_a : \begin{cases} x = 1 + (x_A - 1)t_a, \\ y = y_A t_a, \\ z = z_A t_a, \end{cases} \quad BQ_b : \begin{cases} x = x_B t_b, \\ y = 1 + (y_B - 1)t_b, \\ z = z_B t_b, \end{cases} \quad CQ_c : \begin{cases} x = x_C t_c, \\ y = y_C t_c, \\ z = 1 + (z_C - 1)t_c. \end{cases}$$

Ако правите AQ_a и BQ_b се пресичат в точката $T(x_T, y_T, z_T)$, за нейните координати се получават равенствата: $x_T = \frac{a^2(1-\mu)(1-\nu)}{\tau}$, $y_T = \frac{b^2(1-\nu)(1-\lambda)}{\tau}$, $z_T = \frac{c^2(1-\lambda)(1-\mu)}{\tau}$,

където $\tau = a^2(1-\mu)(1-\nu) + (1-\nu)(1-\lambda) + (1-\lambda)(1-\mu)$. Лесно се

проверява, че координатите на T удовлетворяват и уравнението на правата CQ_c . Следователно правите AQ_a , BQ_b и CQ_c минават през една точка. Ако $\tau = 0$, трите прави са успоредни.

