

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2019

Задача 1. Да се намери безкрайно множество от двойки положителни рационални числа (x, y) , които са решения на уравнението $x^2 = y^2 + 5$.

Милен Найденов, Варна

Решение: едно множество от решения на разглежданото уравнение се описва със следните формули: $x = \frac{2k^2 + 2k + 3}{2k + 1}$, $y = \frac{2k^2 + 2k - 2}{2k + 1}$, където $k = 1, 2, 3, \dots$

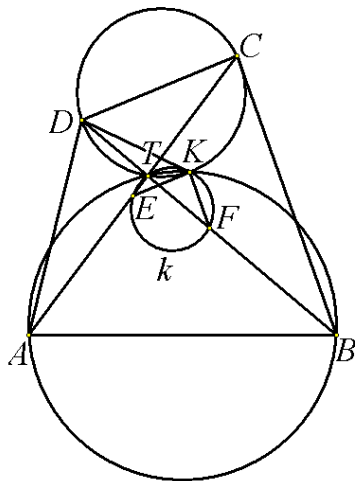
Задача 2. Средите на диагоналите AC и BD на изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са съответно E и F , а пресечната им точка е T . Ако втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжност е K и $S_{CDK} = \frac{1}{2}S_{CDA}$, да се докаже, че правата DK се допира до описаната окръжност на $\triangle EFT$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: тъй като $\angle TKC = \angle TDK$ (като вписани ъгли), то $\angle TAK = \angle TBK$. Аналогично $\angle CAK = \angle DBK$. Зато $\triangle ACK \sim \triangle BDK$.

Оттук $\frac{CK}{DK} = \frac{AC}{DB}$, т.е. (1) $CK = \frac{DK \cdot AC}{DB}$.

Отсечките KE и KF са съответни медиани в триъгълниците ACK и BDK . Зато $\angle CEK = \angle DFK$, т.е. $\angle TEK = \angle TFK$. Следователно точката K лежи върху описаната около $\triangle EFT$ окръжност k . От условието $S_{CDK} = \frac{1}{2}S_{CDA}$ има-

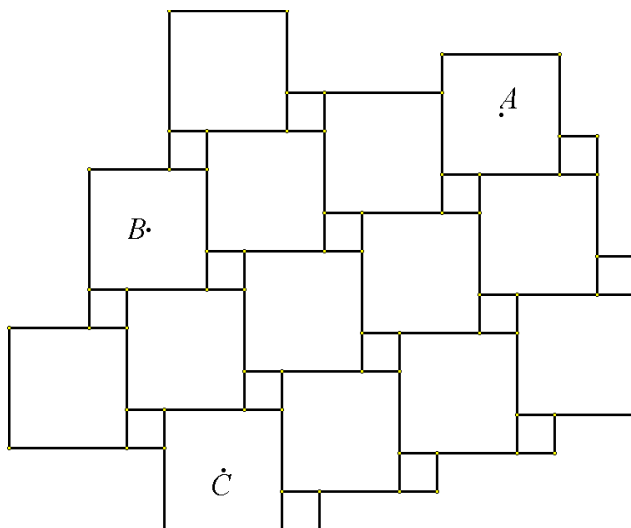


ме (2). От $\angle DKC = \angle DTC = 180^\circ - \angle ATD$ и синусовата теорема за $\triangle ADT$ намираме $\sin \angle DKC = \sin \angle ATD = \frac{AD}{DT} \cdot \sin \angle DAT$. Сега от (1) и (2)

следва $DK \cdot \frac{DK \cdot AC}{DB} \cdot \frac{AD}{DT} \cdot \sin \angle DAT = \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAT$. Оттук

$DK^2 = \frac{1}{2} DB \cdot DT$, т.е. $DK^2 = DF \cdot DT$. Последното равенство показва, че DK е допирателна към окръжността k в точката K . С това задачата е решена.

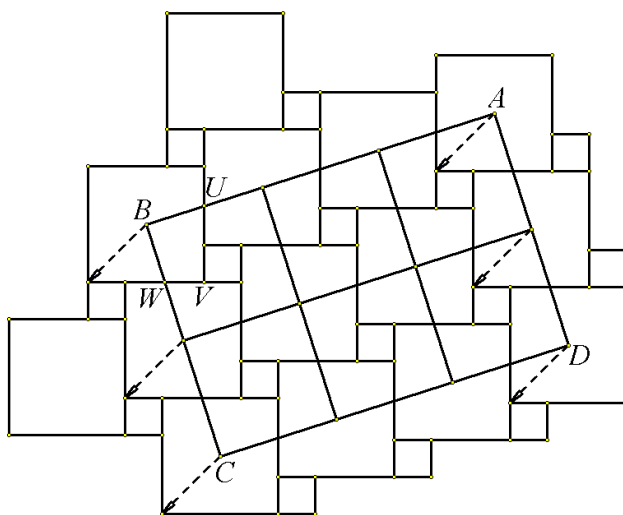
Задача 3. Равнината е покрита с квадрати с дължина на страната 3 cm и квадрати със страна 1 cm , както е показано на чертежа. Ако точките A , B и C са центрове на квадрати със страна 3 cm , както е отбелязано на чертежа, да се намери лицето на $\triangle ABC$.



Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

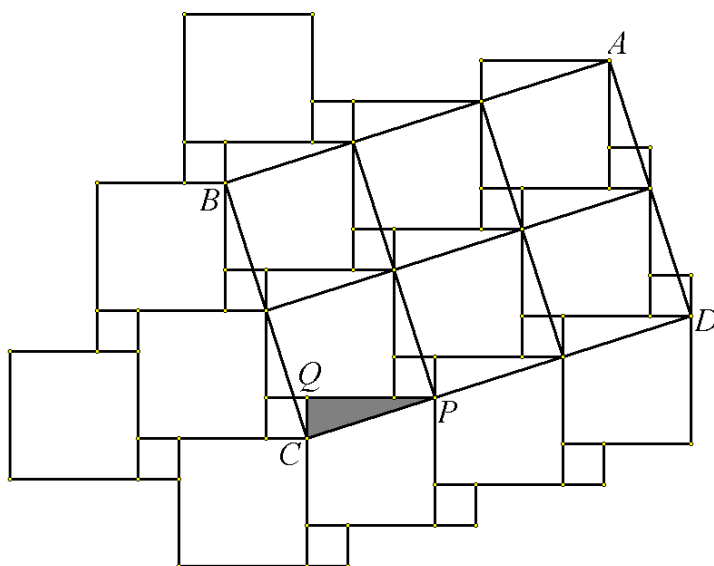
Решение: да построим центровете на още няколко квадрата и ги свържем, както е показано на черт. 1. От свойствата на ъглите лесно се вижда, че $\angle BUV + \angle BWV = 180^\circ$. Оттук следва, че $\angle ABC = 90^\circ$. Освен това четириъгълникът $ABCD$ е правоъгълник, съставен от квадрати със страна a .

Това означава, че $\triangle ABC$ има катети $AB = 3a$ и $BC = 2a$. Следователно лицето му е $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 3a^2$. За да определим стойността на a , извършваме трансляция на покритието на равнината с квадрати, така че центровете на големите квадрати да отиват в техни върхове, както е показано на черт. 1. Същевременно оставяме правоъгълника $ABCD$ на място. Така получаваме конфигурацията на черт. 2. По този начин се вижда, че страната a на



Чертеж 1

квадрат от разлагането на правоъгълника $ABCD$ е хипотенуза на правоъгълен триъгълник CPQ с катети $CQ=1\text{ cm}$ и $PQ=3\text{ cm}$. Следователно $a^2 = CP^2 = 10\text{ cm}^2$. Оттук окончателно получаваме, че $S = 30\text{ cm}^2$.



Чертеж 2

Решение на Румяна Несторова. Разглеждаме координатната система Sxy , както е показано на следващата фигура. Спрямо Sxy имаме $C(0,0)$,

$$B(-2,6) \text{ и } A(7,9). \text{ Тогава } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 7 & 9 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 30 \text{ cm}^2.$$

