Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2017

Задача 1. Да се докаже, че при $x \neq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ са изпълнени равенствата:

а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$;

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)x^{k-1} = \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + x + 1}{(1-x)^2}$;

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3}$.

Слави Харалампиев и Румяна Несторова, Враца

Решение: а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} =$

$$= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)x^{k-1} = 2.\sum_{k=1}^{n} k.x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 2.\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} - \frac{1-x^n}{1-x} =$

$$= \frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2 - (1-x)(1-x^n)}{(1-x)^2} = \frac{2nx^{n+1} - 2(n+1)x^n + 2 - 1 + x + x^n - x^{n+1}}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{(2n-1)x^{n+1} - (2n+1)x^n + x + 1}{(1-x)^2}.$$

в) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} = 1^2 + 2^2.x + 3^2.x^2 + 4^2.x^3 + \ldots + n^2.x^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} k.x^k\right)' =$

$$= \left(x + 2.x^2 + 3.x^3 + 4.x^4 + \ldots + n.x^n\right)' = \left[x.\left(1 + 2.x + 3.x^2 + 4.x^3 + \ldots + n.x^{n-1}\right)\right]' =$$

$$=\left[x.\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\right]'=x'.\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}+x.\left(\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}\right)'=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(1-x)^{2}}+x.\left[\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(1-x)^{2}}\right]'=$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1}{(1-x)^{2}}+$$

$$+x.\frac{\left(n.(n+1).x^{n}-(n+1).n.x^{n-1}\right).(1-x)^{2}+2.(1-x).\left(nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1\right)}{(1-x)^{4}}=$$

$$=\frac{\left(nx^{n+1}-(n+1)x^{n}+1\right).(1-x)}{(1-x)^{3}}+$$

$$+\frac{\left(n.(n+1).x^{n+1}-(n+1).n.x^{n}\right).(1-x)+2.\left(nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x\right)}{(1-x)^{3}}=$$

$$=\frac{-n^{2}x^{n+2}+\left(2n^{2}+2n-1\right)x^{n+1}-(n+1)^{2}x^{n}+x+1}{(1-x)^{3}}.$$

Задача 2. В остроъгълния триъгълник ABC точката O е такава, че $\sphericalangle OAB=\sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OBA=\sphericalangle OCB$. Ако D е пресечната точка на симетралата на отсечката OC и правата през B, успоредна на OC, да се докаже, че ортогоналните проекции на O върху правите CA, AB, BD и DC са върхове на равнобедрен трапец или правоъгълник.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: означаваме проекциите на O върху правите CA, AB, BD и CD съответно с M, N, P и Q. За да докажем твърдението на задачата, е достатъчно да докажем, че $MN=PQ$ и $\sphericalangle NMQ=\sphericalangle MQP$. От условието следва, че $\sphericalangle AOB=180^\circ-\sphericalangle ACB$. Затова радиусите на описаните окръжности за триъгълниците ABC и ABO са равни. Следователно

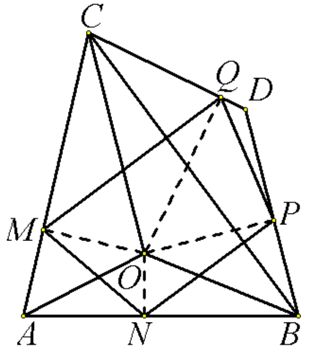
$$\frac{AO}{\sin\sphericalangle OBA}=\frac{BC}{\sin\sphericalangle BAC},$$ т.е. $BC.\sin\sphericalangle OBA=AO.\sin\sphericalangle BAC$.

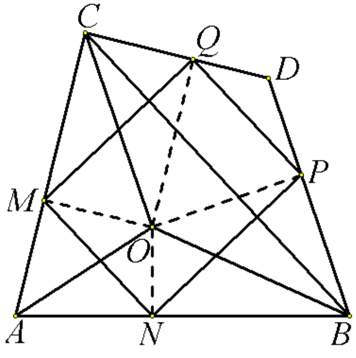
От условието имаме $OD=CD$ и $OC\parallel BD$. Оттук и синусовата теорема за ΔBCD следва

$$BC.\sin\sphericalangle OBA=BC.\sin\sphericalangle OCB=BC.\sin\sphericalangle CBD=CD.\sin\sphericalangle CBD=OD.\sin\sphericalangle CBD,$$

т.е. $BC.\sin\sphericalangle OBA=OD.\sin\sphericalangle CBD$. От последното и предишното равенство получаваме $AO.\sin\sphericalangle BAC=OD.\sin\sphericalangle CBD$. От-

тук и от синусовата теорема за триъгълниците AMN и PQD следва $MN = AO.\sin\sphericalangle MAN = OD.\sin\sphericalangle PDQ = PQ$. От друга страна,
$\sphericalangle NMQ = \sphericalangle AMO + \sphericalangle QMO = \sphericalangle NAO + \sphericalangle OCD = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCD = \sphericalangle ACD$
и $\sphericalangle MQP = \sphericalangle MQO + \sphericalangle OQP = \sphericalangle MCO + \sphericalangle ODP = \sphericalangle MCO + \sphericalangle DOC = \sphericalangle MCO + \sphericalangle OCD = \sphericalangle ACD.$
Така показахме, че $MN = PQ$ и $\sphericalangle NMQ = \sphericalangle MQP$, с което задачата е решена.





Коментар. Може да се покаже, че точката O лежи върху медианата CT на ΔABC. Следователно O е пресечната точка на CT и окръжността с радиус, равен на радиуса на описаната за ΔABC окръжност, която минава през върховете A и B. Ако разгледаме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$, разглежданите точки имат следните координатни представяния:

$$O\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2+2b^2-c^2},\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2+2b^2-c^2},\frac{c^2}{2a^2+2b^2-c^2}\right),$$

$$M\left(\frac{a^4+3b^4+c^4-4b^2c^2-2c^2a^2+4a^2b^2}{2b^2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},0,\frac{a^4-b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2}{2b^2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}\right),$$

$$N\left(\frac{3a^2+b^2-c^2}{2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},\frac{a^2+3b^2-c^2}{2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},0\right),$$

$$P\left(-\frac{a^2-b^2+c^2}{2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},\frac{3a^2+5b^2-3c^2}{2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},\frac{a^2-b^2+c^2}{2a^2+2b^2-c^2}\right),$$

$$D\left(-\frac{a^2}{2a^2+2b^2-c^2},\frac{a^2+2b^2-c^2}{2a^2+2b^2-c^2},\frac{2a^2}{2a^2+2b^2-c^2}\right),$$

$$x_Q=-\frac{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2+2a^2b^2}{2b^2\left(2a^2+2b^2-c^2\right)},$$

$$y_Q = \frac{a^6 + 2b^6 - c^6 + 4a^4b^2 + 5a^2b^4 - 5b^4c^2 + 4b^2c^4 + 3c^4a^2 - 3a^4c^2 - 8a^2b^2c^2}{2a^2b^2\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)},$$

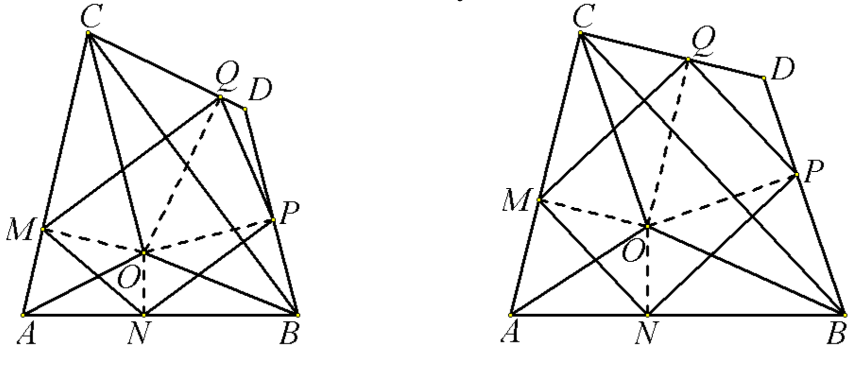
$$z_Q = \frac{-2b^6 + c^6 + 2a^4b^2 + 5b^4c^2 - 4b^2c^4 - 2c^4a^2 + c^2a^4 + 4a^2b^2c^2}{2a^2b^2\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)},$$

където $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

От тези координати лесно се получава, че MQ и PN са перпендикулярни на страната BC. Освен това, ако S е лицето на ΔABC, а m_c – дължината на медианата CT, за разстоянията между разглежданите точки се получават равенствата:

$$MN = PQ = \frac{S}{m_c},\ PN = \frac{aS}{m_c^2},\ QM = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + 2b^2 - c^2\right)S}{2ab^2m_c^2},$$

$$PM = QN = \frac{S\sqrt{2a^4 + 6b^4 + 2c^4 - 7b^2c^2 - 4c^2a^2 + 8a^2b^2}}{2bm_c^2}.$$



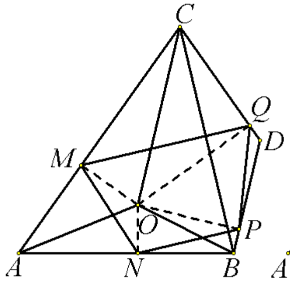
Четириъгълникът $MNPQ$ е правоъгълник тогава и само тогава, когато $QM^2 - PN^2 = 0$. Тъй като

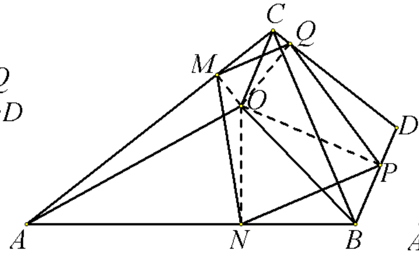
$$QM^2 - PN^2 = \frac{S^2\left(a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + a^2b^2\right)\left(a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + 5a^2b^2\right)}{4a^2b^4m_c^2},$$

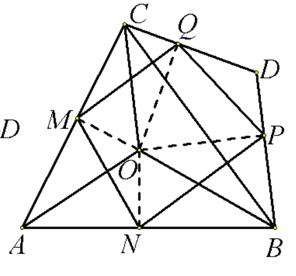
то $a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + a^2b^2 = 0$ или $a^4 + 2b^4 + c^4 - 3b^2c^2 - 2c^2a^2 + 5a^2b^2 = 0$. Второто равенство е изпълнено, когато $c = \sqrt{4a^2 + 6b^2 \pm \sqrt{b^4 - 8a^2b^2}}$. Лесно се вижда обаче, че при такива стойности на c е изпълнено неравенството $a^2+b^2<c^2$. Това означава, че $\sphericalangle ACB$ е тъп и точката O не може да е вътрешна за ΔABC. Следователно $MNPQ$ е правоъгълник тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $a^4+2b^4+c^4-3b^2c^2-2c^2a^2+a^2b^2=0$. Любопитно е да се отбележи, че това равенство е в сила при $a=b=c$. Следователно, ако ΔABC е равностранен, то четириъгълникът $MNPQ$ е правоъгълник със страни $PN=QM=\frac{c\sqrt{3}}{3}$ и $MN=PQ=\frac{c}{2}$. Освен това е интересно кога правоъгълникът $MNPQ$ е квадрат. Това ще бъде изпълнено, когато $PQ=QM=PN$. Тези равенства са в сила тогава и само тогава, когато $a=\frac{c\sqrt{10}}{4}$ и $b=\frac{3c\sqrt{2}}{4}$. Накрая ще отбележим, че трапецът $MNPQ$ може да е такъв, че една от основите му да е равна на бедрата. Случаят $PN=PQ=MN$ е изпълнен при $c=\sqrt{2\left(b^2-a^2\right)}$, а случаят $QM=PQ=MN$ при

$$c^8-2\left(2a^2+3b^2\right)c^6+\left(6a^4+18a^2b^2+13b^4\right)c^4-$$

$$-\left(4a^6+18a^4b^2+25a^2b^4+12b^6\right)c^2+\left(a^2+b^2\right)\left(a^6+5a^4b^2+6a^2b^4+4b^6\right)=0.$$







Задача 3. Точките O, A, A_1 и A_2 в този ред лежат на права l_1, а точките O, B, B_1, B_2 в този ред лежат на права l_2. Нека $OA>OB$, $AA_1=BB_1$ и $A_1A_2=B_1B_2$.

а) Да се докаже, че описаните окръжности k, k_1 и k_2, съответно на триъгълниците OAB, OA_1B_1 и OA_2B_2, имат втора обща точка M.

б) Ако C, C_1 и C_2 са средите съответно на отсечките AB, A_1B_1 и A_2B_2, да се докаже, че C, C_1 и C_2 лежат на една права l.

в) Ако $l\cap l_1=P$, да се определи ъгълът между правите l_1 и MP.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: разглеждаме координатна правоъгълна система Oxy, абсцисната ос на която съвпада с правата l_1 и има посоката на $\overrightarrow{OA}$. Въвеждаме означенията $OA = a$, $OB = b$, $AA_1 = BB_1 = n$, $AA_2 = BB_2 = m$ и $\sphericalangle AOB = \alpha$. Тогава $A(a,0)$, $A_1(a+n,0)$, $A_2(a+m,0)$, $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $B_1((b+n)\cos\alpha,(b+n)\sin\alpha)$ и $B_2((b+m)\cos\alpha,(b+m)\sin\alpha)$.

а) Симетралите s_{OA}, s_{OA_1} и s_{OA_2} на отсечките OA, OA_1 и OA_2 са следните: $s_{OA}: x = \dfrac{a}{2}$, $s_{OA_1}: x = \dfrac{a+n}{2}$ и $s_{OA_2}: x = \dfrac{a+m}{2}$. Симетралите s_{OB}, s_{OB_1} и s_{OB_2} на отсечките OB, OB_1 и OB_2 са следните: $s_{OB}: 2\cos\alpha.x + 2\sin\alpha.y - b = 0$, $s_{OB_1}: 2\cos\alpha.x + 2\sin\alpha.y - (b+n) = 0$, $s_{OB}: 2\cos\alpha.x + 2\sin\alpha.y - (b+m) = 0$. Ако Ω, Ω_1 и Ω_2 са центровете на окръжностите k, k_1 и k_2, описани съответно около OAB, OA_1B_1 и OA_2B_2, то $\Omega = s_{OA} \cap s_{OB}$, $\Omega_1 = s_{OA_1} \cap s_{OB_1}$ и $\Omega_2 = s_{OA_2} \cap s_{OB_2}$. Затова от системите, образувани от съответните двойки уравнения, получаваме: $\Omega\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b - a\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)$,

$$\Omega_1\left(\frac{a+n}{2}, \frac{b+n-(a+n)\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \Omega_2\left(\frac{a+m}{2}, \frac{b+m-(a+m)\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right).$$

Сега определяме уравнението на окръжността k по следния начин: $k: \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{b - a\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)^2 = O\Omega^2$. Тъй като k минава през координатното начало, свободният член в уравнението ѝ е равен на нула. Следователно $k: \sin\alpha.x^2 + \sin\alpha.y^2 - a\sin\alpha.x - (b - a\cos\alpha).y = 0$. По аналогичен начин се получават уравненията

$$k_1: \sin\alpha.x^2 + \sin\alpha.y^2 - (a+n)\sin\alpha.x - [b+n-(a+n)\cos\alpha].y = 0,$$
$$k_2: \sin\alpha.x^2 + \sin\alpha.y^2 - (a+m)\sin\alpha.x - [b+m-(a+m)\cos\alpha].y = 0.$$

След изваждане на уравненията на k_1 и k получаваме $x = -\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}y = -tg\dfrac{\alpha}{2}y$. Заместваме последното равенство в уравнението на k и получаваме $y = \dfrac{1}{2}(b-a)cotg\dfrac{\alpha}{2}$. Следователно втората обща точка на k и k_1 е следната $M\left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}cotg\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Тъй като координатите на M не зависят от n, то е ясно, че k и k_2 се пресичат в същата точка. Следователно окръжностите k, k_1 и k_2 минават през точката M.

б) Координатите на точките C, C_1 и C_2 са следните $C\left(\frac{a+b\cos\alpha}{2},\frac{b\sin\alpha}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{a+n+(b+n)\cos\alpha}{2},\frac{(b+n)\sin\alpha}{2}\right)$ и $C_2\left(\frac{a+m+(b+m)\cos\alpha}{2},\frac{(b+m)\sin\alpha}{2}\right)$. Общото уравнение на правата C_1C_2 се изразява така: $2\sin\alpha.x-2(1+\cos\alpha).y-(a-b)\sin\alpha=0$. След заместване на координатите на C в лявата част на това уравнение се вижда, че се получава нула, което означава, че C лежи на правата C_1C_2. Следователно точките C, C_1 и C_2 лежат на една права l.

в) Тъй като правата l_1 има уравнение $y=0$, то $P\left(\frac{a-b}{2},0\right)$. От координатите на M и P следва, че $\overrightarrow{PM}\left(0,\frac{a-b}{2}cotg\frac{\alpha}{2}\right)$, т.е. $\overrightarrow{PM}$ е колинеарен с ординатната ос Oy. Следователно $PM\perp l_1$.