

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2016

Задача 1. Във всяка от клетките на квадрат 3×3 е записано числото 1. Към всеки три клетки, лежащи в различни редове и различни стълбове, се прибавя едновременно 1. Може ли да се приложи това действие краен брой пъти, така че всички числа в таблицата да станат различни, а сумите по всички редове и всички стълбове да са равни? Може ли сумите на числата по диагоналите да са огледални числа?

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: прилагаме действието към единия диагонал a пъти, после – b пъти към единия триъгълник със страна, успоредна на този диагонал, и след това – c пъти към другия триъгълник със страна, успоредна на същия диагонал. По този начин получаваме последователно таблиците на първата фигура.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

a	1	1
1	a	1
1	1	a

a	b	1
1	a	b
b	1	a

a	b	c
c	a	b
b	c	a

Към втория диагонал на последната таблица прилагаме действието d пъти, после – e пъти към единия триъгълник със страна, успоредна на този диагонал, и след това – f пъти към другия триъгълник със страна, успоредна на същия диагонал. По този начин получаваме последователно таблиците на втората фигура.

a	b	c+d
c	a+d	b
b+d	c	a

a+e	b	c+d
c	a+d	b+e
b+d	c+e	a

a+e	b+f	c+d
c+f	a+d	b+e
b+d	c+e	a+f

Нека $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 10$, $e = 20$ и $f = 30$. След заместване в последната таблица получаваме.

21	32	13
33	11	22
12	23	31

Всички числа в получената таблица са различни и сумите по всички редове и стълбове са равни на 66. Следователно отговорът на първия въпрос е положителен. Сумите на числата в двата диагонала са 63 и 36. Следователно и вторият въпрос има положителен отговор.

Задача 2. В окръжност k с център O е вписан разностранен триъгълник ABC с ортоцентър H така, че точките A , B , H и O лежат на една окръжност. Да се докаже, че:

- OH е ъглополовяща на ъгъла, съседен на $\sphericalangle AHB$;
- точките O и H са симетрични относно ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$;
- ако правата OH пресича AC и BC съответно в точките P и Q , то $OQ = OP$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: тъй като $\triangle ABC$ е остроъгълен и разностранен, точките O и H са различни и вътрешни за $\triangle ABC$. За определеност приемаме, че $AC > BC$. Освен това нека AH и BH пресичат съответно BC и AC в точките D и E . Тогава $\sphericalangle AEH = \sphericalangle CDH = 90^\circ$. Тъй като точките A , B , H и O лежат на една окръжност, то $\sphericalangle AHB = \sphericalangle AOB$. От друга страна, четириъгълникът $CEHD$ е вписан в окръжност и затова $\sphericalangle AHB = 180^\circ - \sphericalangle ACB$. В окръж-

ността k са изпълнени равенствата $\sphericalangle AOB = \widehat{AB}$ и $\sphericalangle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2}$. Затова

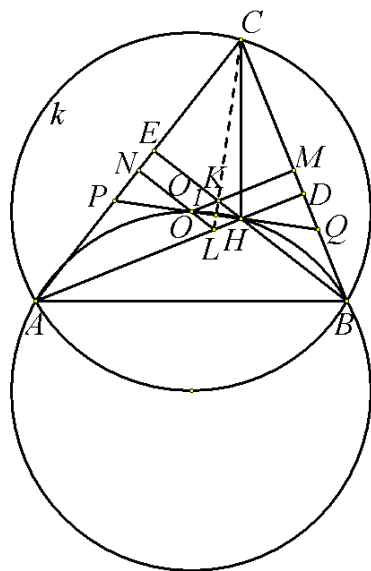
$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$ и $180^\circ - \sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle ACB$. Следователно $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ и $\sphericalangle AHB = \sphericalangle AOB = 120^\circ$. Ако M и N са средите съответно на страните BC и AC , то $OM \parallel AD$ и $ON \parallel BE$. Нека $OM \cap BE = K$ и $ON \cap AD = L$. Тъй като $OK \parallel LH$ и $OL \parallel KH$, четириъгълникът $OKHL$ е успоредник. От

правоъгълните триъгълници CAD и CBE следва, че $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE = 30^\circ$.

Следователно $CD = \frac{1}{2} AC = CN$ и $CE = \frac{1}{2} BC = CM$. Затова

$DM = CD - CM = CN - CE = NE$. Но височините на успоредника $OKHL$ са

равни на DM и NE , т.е. те са равни. Това означава, че $OKHL$ е ромб, а диагонали-те му OH и KL са перпендикулярни и са ъглополовящи съответно на $\angle KOL = 60^\circ$ и $\angle OKH = 120^\circ$. Освен това пресечната точка O_1 на OH и KL е тяхна обща среда. Затова O_1 е центърът на Ойлерова-



та окръжност за $\triangle ABC$. От друга страна,

$$\angle COM = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{\widehat{BC}}{2} = \angle BAC \quad \text{и}$$

$$\angle CHE = \angle BAC.$$

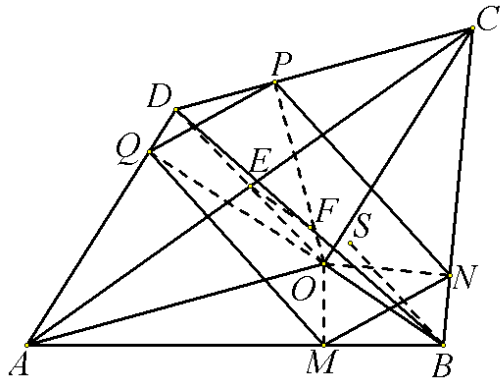
Затова $\angle COM = \angle CHE$ и $\angle CON = \angle HOM + \angle COM = 30^\circ + \angle CHE = \angle$. Следователно $\triangle CON$ е равнобедрен, т.е. $CH = CO$ и CO е симетрала на OH . Това означава, че CO_1 е ъглополовяща на $\angle OCH$, а точките K и L лежат върху нея. Правоъгълните триъгълници CHD и CON са еднакви. Оттук следва, че $\angle HCD = \angle OCN$ и затова CO_1 е ъглополовяща на $\angle ACB$. Но тя е симетрала на PQ , което означава, че $O_1Q = O_1P$ и $OQ = OO_1 + O_1Q = OO_1 + O_1P = OP$.

Задача 3. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ мерките на ъглите при върховете A , B , C и D са съответно α , β , γ и δ , а дължините на отсечките CD , DA и AC са съответно c , d и m . Ако са изпълнени равенствата $\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{d}{c}$ и $2\delta = 180^\circ + \beta$, да се намери разстоянието между средите на диагоналите AC и BD .

Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека E и F са средите съответно на диагоналите AC и BD , а O е точка, симетрична на D спрямо E . Четириъгълникът $AOCD$ е успоредник и затова $AO = DC = c$, $CO = DA = d$ и $\angle AOC = \angle ADC = \delta$. Означаваме ортогоналните проекции на O върху страните AB , BC , CD и DA съответно с M , N , P и Q . Ще докажем, че $MNPQ$ е успоредник. Тъй като AO е диаметър на окръжността, минаваща през точките A , M и N , от синусовата теорема за $\triangle AMQ$ получаваме $QM = c \cdot \sin \alpha$. Аналогично се получава

равенството $PN = d \cdot \sin \gamma$. Така от условието $c \cdot \sin \alpha = d \cdot \sin \gamma$ следва, че $QM = PN$. Ще докажем, че е изпълнено и $QM \parallel PN$. От вписаните четириъгълници $AMOQ$, $QOPD$ и $PONC$ и равенството $2\delta = 180^\circ + \beta$ получаваме последователно $\sphericalangle AMQ + \sphericalangle PNC = \sphericalangle AOQ + \sphericalangle COP$ т.е. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AMQ + \sphericalangle PNC$. Нека S е такава точка в $\sphericalangle ABC$, за която $SB \parallel QM$. Тогава



$\sphericalangle ABS = \sphericalangle AMQ$. От последните две равенства получаваме последователно $\sphericalangle SBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABS = (\sphericalangle AMQ + \sphericalangle PNC) - \sphericalangle AMQ = \sphericalangle PNC$, т.е. $\sphericalangle SBC = \sphericalangle PNC$. Следователно $SB \parallel PN$. Като вземем предвид и $SB \parallel QM$, получаваме $PN \parallel QM$. Така установихме, че $MNPQ$ е успоредник. Оттук следва, че $QP = MN$. От друга страна, според синусовата теорема, приложена за $\triangle QPD$ и $\triangle MNB$, имаме равенствата $QP = DO \cdot \sin \delta$ и $MN = BO \cdot \sin \beta$.

Затова $DO \cdot \sin \delta = BO \cdot \sin \beta$. Оттук и условието $2\delta = 180^\circ + \beta$ следва, че $BO = \frac{DO \cdot \sin \delta}{\sin \beta} = \frac{2 \cdot DE \cdot \sin \delta}{|\sin 2\delta|} = \frac{DE}{|\cos \delta|}$. Като вземем предвид, че $EF = \frac{1}{2} \cdot BO$

(EF е средна отсечка в $\triangle OBD$), получаваме $EF = \frac{DE}{2|\cos \delta|}$. Но от $\triangle ACD$

следват равенствата $DE = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2d^2 - m^2}$ и $2|\cos \delta| = \frac{|c^2 + d^2 - m^2|}{cd}$. За-

местваме тези равенства в последното равенство и получаваме окончателно

$$EF = \frac{cd \sqrt{2c^2 + 2d^2 - m^2}}{2|c^2 + d^2 - m^2|}.$$