

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2012

**Задача 1.** Да се намерят всички положителни числа  $x, y$  и  $z$ , за които е изпълнено равенството  $x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 2011$ .

*Сава Гроздев, София, Веселин Ненков, Бели Осъм*

**Решение:** Тъй като  $13^3 = 2197$ ,  $2 \cdot 11^3 = 2662$  и  $3 \cdot 9^3 = 2187$ , то  $x \leq 12$ ,  $y \leq 10$  и  $z \leq 8$ . Освен това  $x$  и  $z$  имат различна четност. Така с непосредствена проверка се вижда, че когато  $z = 1, 3, 5, 7$  при  $x = 2, 4, 6, 8, 10, 12$  и  $z = 2, 4, 6, 8$  при  $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ , само  $x = 2, y = 10, z = 1$  е решение на даденото уравнение.

**Задача 2.** В изпъкналия четириъгълник  $ABCD$  средите на диагоналите  $AC$  и  $BD$  са съответно  $E$  и  $F$ , а продълженията на страните  $AD$  и  $BC$  се пресичат в точка  $U$  ( $D$  лежи между  $A$  и  $U$ ). Ако  $M = UE \cap AB$ ,  $N = UF \cap AB$ ,  $P = UF \cap CD$  и  $Q = UE \cap CD$ , да се докаже, че: а)  $\frac{AM}{BM} = \frac{CP}{DP}$ ; б)  $MP \parallel AD$  и  $NQ \parallel BC$ .

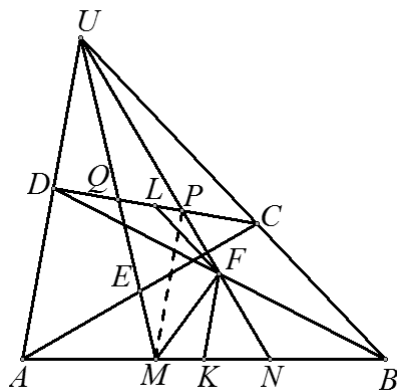
*Хаим Хаимов, Варна*

**Решение:** а) От теоремата на Менелай за  $\triangle ABC$  и правата  $UM$  получаваме  $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BU}{CU} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$ . По същата теорема за  $\triangle BCD$  и правата  $UP$  получаваме  $\frac{CP}{DP} \cdot \frac{DU}{BU} \cdot \frac{BF}{CF} = 1$ . След приравняване на левите части на последните две равенства, като

използваме, че по условие  $\frac{CE}{AE} = \frac{DF}{BF} = 1$ ,

стигаме до желаното равенство  $\frac{AM}{BM} = \frac{CP}{DP}$ .

б) Нека  $K$  и  $L$  са средите съответно на  $AB$  и  $CD$ . По доказаното в а) е изпълнено  $\frac{BM}{AM} = \frac{DP}{CP} = k$ . Тогава  $BM = k \cdot AM$ , откъдето  $AM = \frac{AB}{k+1}$  и  $KM = AK - AM = \frac{k-1}{2(k+1)} \cdot AB$ .



От последните две равенства след почленно деление се получава  $\frac{KM}{AM} = \frac{k-1}{2}$ .

Аналогично от равенството  $DP=k \cdot CP$  следва  $\frac{LP}{CP} = \frac{k-1}{2}$ . Следователно  $\frac{KM}{AM} = \frac{LP}{CP}$ .

От друга страна, тъй като ( $FL$  е средна отсечка в  $\triangle BCD$ ), по теоремата на Талес получаваме  $\frac{LP}{CP} = \frac{FP}{UP}$ . Затова  $\frac{KM}{AM} = \frac{FP}{UP}$ . Освен това ( $FK$  е средна отсечка в  $\triangle ABD$ ), което означава, че  $AKFU$  е трапец. В него отсечката  $MP$  дели бедрата  $AK$  и  $UP$  в едно и също отношение и следователно е успоредна на основите му. В частност  $MP \parallel AU$ , т.е.  $MP \parallel AD$ . Аналогично се показва, че  $NQ \parallel BC$ .

**Задача 3.** В триъгълник  $ABC$  е вписано конично сечение  $k$ , допиращо се до  $AB$  и  $BC$  съответно в точки  $P$  и  $Q$ . Ако  $R$  е допирната точка на  $k$  и  $AC$ , а  $q$  произволна права през  $Q$ , пресичаща  $PR$  в точка  $M$  и  $k$  в точка  $Q'$ , да се построят с линейка и пергел точката  $R$  и хармонично спрегнатата точка  $X$  на  $M$  спрямо двойката пресечни точки  $Q$  и  $Q'$  на  $q$  и  $k$ .

Асен Симеонов, Своге

**Решение:** 1) Ако  $AQ \cap CP = O$ , то според теоремата на Брианшон точката  $R$  е сечението на правите  $BO$  и  $AC$ . 2) Прилагаме теоремата на Паскал за точките  $RRPPQQ'$ :  $RR = AC \cap PQ = 1'$ ,  $RP \cap QQ' = 2' = M$ ,  $PP = AB \cap 1'2' = 3'$  – точките  $1'$ ,  $2'$  и  $3'$  са колинеарни. Точката  $Q'$  се построява като сечение на  $3'R$  и  $q$ . 3) Точките  $M$ ,  $N = RQ' \cap PQ$  и  $L = PQ' \cap RQ$  са диагонални за четириъгълника  $PQRQ'$  и затова  $NL$  е поляра на  $M$ . Следователно търсената точка  $X$  се построява като сечение на  $q$  с  $NL$ .

