

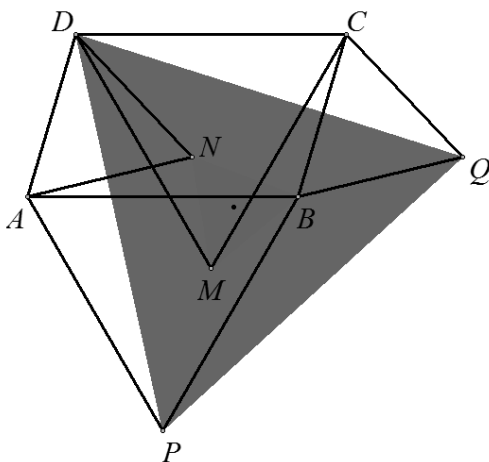
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2011

Задача 1. На страните AB и BC на успоредника $ABCD$ външно за $ABCD$ са построени равностранните триъгълници ABP и BCQ , а на страните CD и DA вътрешно за $ABCD$ са построени равностранните триъгълници с върхове съответно CDM и DAN . Да се докаже, че ортоцентровете на триъгълниците PQD и MNB съвпадат.

Юлиян Цветков, Стара Загора

Решение (Юлиян Цветков): Ще използваме комплексни числа и някои известни техни свойства. С малки букви ще означаваме афиксите на точките, означени със съответните главни букви. За център на координатната система избираме пресечната точка O на диагоналите на успоредника. Ясно е, че $d = -b$ и $c = -a$. Означаваме с $\omega_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Оттук $\arg \omega_1 = \frac{\pi}{3}$, $|\omega_1| = 1$ и $\arg \omega = \frac{2\pi}{3}$, $|\omega| = 1$. Отбелязваме пет техни свойства: 1) $\omega_1^2 = \omega$; 2) $\omega^3 = 1$; 3) $\omega_1 \omega = -1$; 4) $1 + \omega + \omega^2 = 0$, 5) $1 - \omega_1 + \omega_1^2 = 0$. От равностранния триъгълник BCQ се получават последователно равенствата: $(c - q)\omega_1 = b - q$, $q = \frac{b - c\omega_1}{1 - \omega_1}$, $q - d = \frac{b - c\omega_1 - d + d\omega_1}{1 - \omega_1}$.

От равностранния триъгълник ABP се получават последователно равенствата: $(b - p)\omega_1 = a - p$, $p = \frac{a - b\omega_1}{1 - \omega_1}$, $p - d = \frac{a - b\omega_1 - d + d\omega_1}{1 - \omega_1}$. Сега след елементарни пресмятания получаваме, че $\frac{q - d}{p - d} = \omega_1$. Оттук непосредствено следва, че

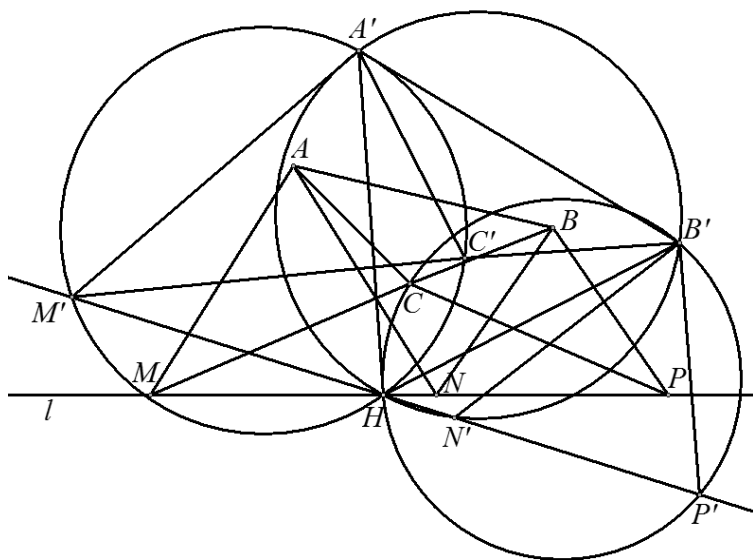


От равностранния триъгълник BCQ се получават последователно равенствата: $(c - q)\omega_1 = b - q$, $q = \frac{b - c\omega_1}{1 - \omega_1}$, $q - d = \frac{b - c\omega_1 - d + d\omega_1}{1 - \omega_1}$. От равностранния триъгълник ABP се получават последователно равенствата: $(b - p)\omega_1 = a - p$, $p = \frac{a - b\omega_1}{1 - \omega_1}$, $p - d = \frac{a - b\omega_1 - d + d\omega_1}{1 - \omega_1}$. Сега след елементарни пресмятания получаваме, че $\frac{q - d}{p - d} = \omega_1$. Оттук непосредствено следва, че

$\sphericalangle PQD = 60^\circ$ и $QD = PD$. Следователно $\triangle PQD$ е равностранен. Аналогично се доказва, че и $\triangle MNB$ е равностранен. Остава да докажем, че медицентровете им съвпадат, което доказва твърдението на задачата. Нека O_1 и O_2 са центровете на $\triangle PQD$ и $\triangle MNB$. Тогава $o_1 = \frac{p+q+d}{3} = \frac{a(1+\omega_1)}{3(1-\omega_1)}$. От $\triangle CDM$ се получава $(c-m)\omega_1 = d-m$, $m = \frac{d-c\omega_1}{1-\omega_1} = \frac{-b+a\omega_1}{1-\omega_1}$. От равностранния $\triangle DN$ следва $(d-n)\omega_1 = a-n$, $n = \frac{a-d\omega_1}{1-\omega_1} = \frac{a+b\omega_1}{1-\omega_1}$. Оттук получаваме, че е изпълнено $o_2 = \frac{m+n+b}{3} = \frac{a(1+\omega_1)}{3(1-\omega_1)}$. Следователно $O_1 \equiv O_2$. С това задачата е напълно решена.

Задача 2. Основите MN , NP и PM на равнобедрените триъгълници MAN , NBP и PCM лежат върху права l . Сумата на ориентираните ъгли $\sphericalangle MAN$, $\sphericalangle NBP$ и $\sphericalangle PCM$ е 360° . Да се докаже, че ортоцентърът на триъгълника ABC лежи върху правата l .

Николай Белухов, Стара Загора



Решение (Николай Белухов): Нека $\alpha = \frac{1}{2} \angle MAN$, $\beta = \frac{1}{2} \angle NBP$ и $\gamma = \frac{1}{2} \angle PCM$. Построяваме $\Delta A'B'C'$ с ъгли α , β , γ и ортоцентър H . Нека M' е такава точка, че $\Delta A'M'C' \sim \Delta AMC$. Ясно е, че M' лежи върху описаната окръжност на $\Delta A'HC'$. Нека правата $M'H$ пресича описаните окръжности на $\Delta B'HC'$ и $\Delta A'HB'$ съответно в точките P' и N' . С равни ъгли се установява, че $\Delta M'A'N' \sim \Delta MAN$, $\Delta N'B'P' \sim \Delta NBP$ и $\Delta P'C'M' \sim \Delta PCM$. Оттук следва, че фигурите $M'A'N'B'P'C'$ и $MANBPC$ са подобни. Тъй като H лежи върху правата $M'N'P'$, то H лежи и върху правата $MNP \equiv l$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко просто число $p > 3$ съществува естествено число n такова, че числото $2 \cdot 3^n + 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 15^n - 1$ се дели на p .

Вълчо Милчев, Мария Петрова, Кърджали

Решение (Вълчо Милчев, Мария Петрова): Означаваме $A_n = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 15^n - 1$. При $n = 1$ имаме $A_1 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 - 1 = 55$, т.е. A_1 се дели на 5. Нека сега $p > 5$. От равенството $30A_{p-2} = 30(2 \cdot 3^{p-2} + 2 \cdot 10^{p-2} + 2 \cdot 15^{p-2} - 1)$ получаваме $30A_{p-2} = 20 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 10^{p-1} + 4 \cdot 15^{p-1} - 30$. От малката теорема на Ферма следва, че $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ и $15^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (последните две сравнения са изпълнени, защото $p > 5$). Тогава $30A_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ и следователно A_{p-2} се дели на p при $p > 5$. С това задачата е решена.