

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2016 Г.

Задача 1. Да се докаже, че съществуват безброй много двойки естествени числа x и y , при които числата $x^2 + 2016xy + y^2$ са квадрати на естествени числа.

Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния

Решение. Нека $x^2 + 2016xy + y^2 = k^2$, а Δ^2 е дискриминанта на квадратното спрямо x уравнение $\Delta^2 = 1008^2 y^2 - (y^2 - k^2)$. Следователно $\Delta^2 = 1008^2 y^2 - (y^2 - k^2)$. Оттук получаваме равенството $(\Delta - k)(\Delta + k) = 1007 \cdot 1009 \cdot y^2$. Предполагаме, че $\Delta - k = 1007 \cdot 1009$ и $\Delta + k = y^2$. Оттук имаме $\Delta = \frac{y^2 + 1007 \cdot 1009}{2}$ и $k = \frac{y^2 - 1007 \cdot 1009}{2}$. След заместване в уравнението получаваме $x = \frac{(y - 1007)(y - 1009)}{2}$.

Сега полагаме $y = 2t + 1$, където t е естествено число и $t \geq 505$. От горното равенство следва, че $x = 2(t - 503)(t - 504)$. След заместване на целите числа x и y с получените формули в условието на задачата получаваме $x^2 + 2016xy + y^2 = (2t^2 + 2t - 508031)^2$.

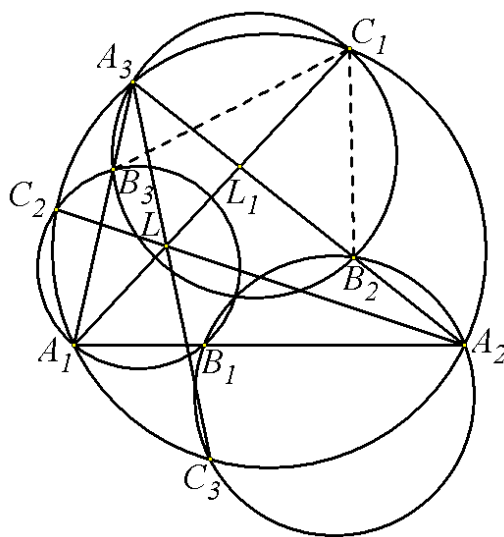
Задача 2. Точките B_1 , B_2 и B_3 лежат съответно върху страните A_1A_2 , A_2A_3 и A_3A_1 на $\Delta A_1A_2A_3$, като $A_2B_1 = 2A_1B_1$, $A_3B_2 = 2A_2B_2$ и $A_1B_3 = 2A_3B_3$. Ако вторите общи точки на описаните около триъгълниците $B_2B_3A_3$, $B_3B_1A_1$ и $B_1B_2A_2$ окръжности с описаната окръжност на $\Delta A_1A_2A_3$ са съответно C_1 , C_2 и C_3 , да се докаже, че правите A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 се пресичат в една точка. Коя е тази точка?

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Ще докажем, че правите A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 се пресичат в точката на Лемоан за $\Delta A_1A_2A_3$. От свойствата на вписаните ъгли следват равенствата $\sphericalangle B_3A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_1$ и $\sphericalangle A_3B_3C_1 = \sphericalangle A_3B_2C_1$. Следователно $\Delta A_1B_3C_1 \sim \Delta A_2B_2C_1$. Затова е изпълнено равенството $\frac{A_1B_3}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_1}$. Освен

това от условието следват равенствата $A_1B_3 = \frac{2}{3}A_1A_3$ и $A_2B_2 = \frac{1}{3}A_2A_3$. От трите равенства получаваме $A_1C_1 \cdot A_2A_3 = 2 \cdot A_1A_3 \cdot A_2C_1$. От друга страна, по теоремата на Птолемей за четириъгълника $A_1A_2C_1A_3$ е изпълнено равенството $A_1C_1 \cdot A_2A_3 = A_1A_3 \cdot A_2C_1 + A_1A_2 \cdot A_3C_1$. След заместване на предходното равенство в последното получаваме $A_1A_3 \cdot A_2C_1 = A_1A_2 \cdot A_3C_1$, което екивалентно с $\frac{A_2C_1}{A_3C_1} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}$. Означаваме $A_1C_1 \cap A_2A_3 = L_1$. Като използваме последното равенство, получаваме $\frac{A_2L_1}{A_3L_1} = \frac{S_{A_1A_2C_1}}{S_{A_1A_3C_1}} = \frac{\frac{1}{2}A_1A_2 \cdot A_2C_1 \cdot \sin \angle A_1A_2C_1}{\frac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_3C_1 \cdot \sin \angle A_1A_3C_1} = \frac{A_1A_2^2}{A_1A_3^2}$. Сле-

дователно $A_1L_1 \equiv A_1C_1$ е симедиана на $\Delta A_1A_2A_3$. Аналогично се доказва, че правите A_2C_2 и A_3C_3 са симедиани на $\Delta A_1A_2A_3$. Следователно правите A_1C_1 , A_2C_2 и A_3C_3 се пресичат в точката на Лемоан L за $\Delta A_1A_2A_3$.



Задача 3. Спрямо координатната система Oxy кривата k е такава, че лицето S на триъгълника, образуван от ординатната ос Oy , допирателната към k в произволна точка T и правата OT , не зависи от T . Да се намери уравнението на кривата k , ако е известно, че тя минава през точката $(S, 2)$.

Милен Найденов, Варна

Решение. Нека $T(x, y)$ е произволна точка от k , а допирателната в T към k пресича Oy в точката $M(\xi, \eta)$. От условието следва равенството $x\eta = 2.S$. Освен това уравнението на допирателната в T е $y = y'.x + \eta$. От двете равенства се получава обикновеното линейно диференциално уравнение $x^2 y' - xy - 2.S = 0$. Решаваме това уравнение по метода на Лагранж и получаваме $xy = S + C.x^2$, където C е реална константа. Заместваме в последното уравнение координатите на точката $(S, 2)$, за да определим, че $C = \frac{1}{S}$. Следователно търсената крива k има следното уравнение $y = \frac{x}{S} + \frac{S}{x}$. Кривата k е хипербола, за която правата Ox е асимптота.

