

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2015

Задача 1. За реалните положителни числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) е изпълнено равенството $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = s$. Да се докаже неравенството $\frac{x_1^3}{s-x_1^2} + \frac{x_2^3}{s-x_2^2} + \dots + \frac{x_n^3}{s-x_n^2} \geq \frac{\sqrt{ns}}{n-1}$. Кога се достига равенството?

Лучиан Туцеску – Крайова, и Мариан Воинеа – Букурещ

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Тогава $x_1^3 \geq x_2^3 \geq \dots \geq x_n^3$ и $\frac{1}{s-x_1^2} \geq \frac{1}{s-x_2^2} \geq \dots \geq \frac{1}{s-x_n^2}$. Оттук според неравенството на Чебишов следва

$$(*) \quad \frac{x_1^3}{s-x_1^2} + \frac{x_2^3}{s-x_2^2} + \dots + \frac{x_n^3}{s-x_n^2} \geq \frac{1}{n} (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \left(\frac{1}{s-x_1^2} + \frac{1}{s-x_2^2} + \dots + \frac{1}{s-x_n^2} \right).$$

От неравенството на Чебишов следва още, че $\left[(s-x_1^2) + (s-x_2^2) + \dots + (s-x_n^2) \right] \left(\frac{1}{s-x_1^2} + \frac{1}{s-x_2^2} + \dots + \frac{1}{s-x_n^2} \right) \geq n^2$, което води до неравенството $\frac{1}{s-x_1^2} + \frac{1}{s-x_2^2} + \dots + \frac{1}{s-x_n^2} \geq \frac{n^2}{(n-1)s}$.

След последователно прилагане на „хубавото неравенство“ и неравенството между средното аритметично и средното квадратично получаваме

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= \frac{x_1^4}{x_1} + \frac{x_2^4}{x_2} + \dots + \frac{x_n^4}{x_n} \geq \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \\ &= \frac{s^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \geq \frac{s^2}{\sqrt{n(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}} = \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

След заместване на намерените две неравенства в дясната страна на (*)

$$\frac{x_1^3}{s-x_1^2} + \frac{x_2^3}{s-x_2^2} + \dots + \frac{x_n^3}{s-x_n^2} \geq \frac{\sqrt{ns}}{n-1}. \text{ Равенство се достига тогава и само тогава, когато } x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt{\frac{s}{n}}.$$

Задача 2. Нека M и N са такива точки съответно от страните AC и BC на остроъгълния триъгълник ABC , че е изпълнено равенството $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$. Ако P и Q са средите съответно на отсечките AN и BM , а T е пресечната им точка, да се докаже, че когато точките M и N менят положенията си върху страните AC и BC , описаната около ΔPQT окръжност минава през постоянна точка. Къде лежи тази точка?

Хаим Хаимов – Варна

Решение. Нека E е средата на AB , а O е втората пресечна точка на описаната около ΔMNC окръжност с медианата CE . Ще покажем, че когато M и N менят положенията си съответно върху AC и BC , точката O лежи върху описаната за ΔPQT окръжност k и е постоянна за k . От равенствата $\frac{1}{2}OM \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle OMC = S_{AOC} = S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC \cdot \sin \sphericalangle ONB$ и $\sphericalangle OMC = \sphericalangle ONB$ следва, че $OM \cdot AC = ON \cdot BC$, т.е. От друга страна, равенствата $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot MB \cdot \sin \sphericalangle AMB = \frac{1}{2}BC \cdot NA \cdot \sin \sphericalangle ANB$ водят до $\frac{MB}{NA} = \frac{BC}{AC}$. Следователно $\frac{OM}{ON} = \frac{MB}{NA} = \frac{BC}{AC}$. Сега от условието $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$ следва, че $\sphericalangle BMC + \sphericalangle ANC = 180^\circ$. Затова четириъгълникът $MTNC$ е вписан в окръжност k_0 , т.е. точката T лежи върху описаната около ΔMNC окръжност. Оттук следва, че $\sphericalangle OMT = \sphericalangle ONT$, т.е. $\sphericalangle OMB = \sphericalangle ONA$.

Следователно $\Delta MOB \sim \Delta NOA$, откъдето $\frac{OA}{OB} = \frac{AN}{BM} = \frac{AC}{BC}$. Заключаваме, че O е втората пресечна точка на CE с Аполониевата окръжност за отсечката AB при отношение $\frac{AC}{BC}$. Следователно точката O е неподвижна точка върху медианата CE . Освен това от $\Delta MOB \sim \Delta NOA$ следва, че $\Delta OQB \sim \Delta OPA$. Затова $\sphericalangle OQB = \sphericalangle OPA = \sphericalangle OPT$. Следователно четириъгълникът $OPQT$ е вписан в окръжност, т.е. $O \in k$. С това задачата е решена, но се оказва, че окръжността k минава през още една постоянна точка. Това е средата E на AB . В доказателството на този факт ще из ползваме означенията: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$

,

$\sphericalangle AMB = \delta$ и S – лицето на $\triangle ABC$. От синусовата теорема за $\triangle ABM$ имаме равенствата $\frac{BM}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{AB}{\sin \delta}$. Оттук следва $BM = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \delta}$ и $AM = \frac{c}{\sin \delta} (\sin \alpha \cos \delta + \sin \delta \cos \alpha) = c (\sin \alpha \operatorname{ctg} \delta + \cos \alpha)$.

След заместване на равенствата $\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$ и $\cos \alpha = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$ получаваме $BM = \frac{2S}{b \sin \delta}$ и $AM = \frac{4S \cdot \operatorname{ctg} \delta - a^2 + b^2 + c^2}{2b}$. Аналогич-

но от синусовата теорема за $\triangle ABN$, която се изразява с равенствата

$\frac{AN}{\sin \beta} = \frac{BN}{\sin(\delta - \beta)} = \frac{AB}{\sin \delta}$ и равенствата $\sin \beta = \frac{2S}{ac}$ и $\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac}$ следват равенствата $AN = \frac{2S}{a \sin \delta}$ и $BN = \frac{-4S \cdot \operatorname{ctg} \delta + a^2 - b^2 + c^2}{2a}$.

От свойствата на секущите към окръжността k_0 следват равенствата

$AT \cdot AN = AM \cdot AC$ и $BT \cdot BM = BN \cdot BC$. Оттук, като вземем предвид получените по-рано равенства, намираме $AT = \frac{a \cdot \sin \delta}{4S} (4S \cdot \operatorname{ctg} \delta - a^2 + b^2 + c^2)$ и $BT = \frac{b \cdot \sin \delta}{4S} (-4S \cdot \operatorname{ctg} \delta + a^2 - b^2 + c^2)$. Нека сега k_1 е описаната около $\triangle AET$

окръжност. От свойствата на секущите към k_1 следва $AU \cdot AE = AT \cdot AP$. Тъй

като $AE = \frac{c}{2}$, $AP = \frac{AN}{2}$ и $UE = AE - AU$, то $UE = \frac{1}{2c} (-4S \cdot \operatorname{ctg} \delta + a^2 - b^2)$.

Нека k_1 пресича за втори път BM в точка Q' . От свойството на секущи-

те към k_1 , изразяващо се с равенството $BQ' \cdot BT = BE \cdot BU$, и равенствата

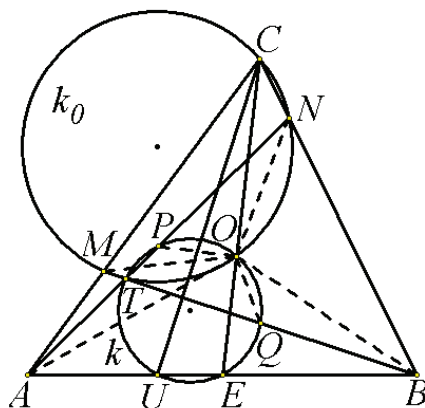
$BE = \frac{c}{2}$ и $BU = BE + UE$ следва $BQ' = \frac{(c + 2UE)cS}{b \sin \delta (-4S \operatorname{ctg} \delta + a^2 - b^2 + c^2)}$.

След заместване в това равенство на намерения израз за UE получаваме

$BQ' = \frac{S}{b \sin \delta}$. Следователно $BQ' = \frac{BM}{2}$. Това означава, че Q' е среда на BM ,

т.е. $Q' \equiv Q$. Следователно $k_1 \equiv k$ и k минава през E . Така окончателно стигаме до извода: когато точките M и N се движат съответно по AC и BC ,

окръжността k пресича медианата CE на $\triangle ABC$ в две постоянни точки, едната от които е средата E на AB , а другата е такава точка O , за която е изпълнено $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BC}$.



Задача 3. Дадени са сфера S и точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ върху нея. Да се определи множеството от точки P , които са вътрешни за S и удовлетворяват равенството $\frac{A_1P}{PB_1} + \frac{A_2P}{PB_2} + \dots + \frac{A_nP}{PB_n} = n$, където B_k е пресечната точка на A_kP и S ($k=1, 2, \dots, n$).

Христо Лесов – Казанлък

Решение. Нека O и R са съответно центърът и радиусът на сферата S .

При $n=1$ върху S е дадена само една точка A_1 и е изпълнено равенството $\frac{A_1P}{PB_1} = 1$, т.е. $A_1P = PB_1$. Затова P е средата на хордата A_1B_1 и лежи върху

окръжност, описана около правоъгълния триъгълник A_1PO ($\angle A_1PO = 90^\circ$) или $P \equiv O$. Следователно търсеното множество е сфера с диаметър $A_1O = R$ без точката A_1 . При $n \geq 2$ върху S са дадени поне две точки, а тройките точки A_1, P, O ; A_2, P, O ; ...; A_n, P, O лежат на окръжности с общ диаметър

$DE = 2R$, където D и E са пресечните точки OP с S . От тези окръжности следва зависимостта

$$A_1P.PB_1 = A_2P.PB_2 = \dots = A_nP.PB_n = DP.PE = (R + OP)(R - OP) = R^2 - OP^2.$$

Даденото в условието равенство преобразуваме във вида

$$\frac{A_1P^2}{A_1P.PB_1} + \frac{A_2P^2}{A_2P.PB_2} + \dots + \frac{A_nP^2}{A_nP.PB_n} = n \text{ или } \frac{A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2}{R^2 - OP^2} = n, \text{ т.е.}$$

$$A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2 = n.(R^2 - OP^2) \quad (1). \quad \text{От известното ра-}$$

венство на Лайбниц или теоремата на Лагранж за инерчните моменти I_G и I_P на системата точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ с равни маси спрямо нейния масов център G и произволна точка P следва $I_P - I_G + n.PG^2$, т.е. $A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2 = A_1G^2 + A_2G^2 + \dots + A_nG^2 + n.PG^2$ (2)

(Паскалев, Г., И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985). При $P \equiv O$ от (2) получаваме $A_1O^2 + A_2O^2 + \dots + A_nO^2 = A_1G^2 + A_2G^2 + \dots + A_nG^2 + n.OG^2$.

Тъй като $A_1O = A_2O = \dots = A_nO = R$, то $A_1G^2 + A_2G^2 + \dots + A_nG^2 = n.(R^2 - OG^2)$. Сега заместваем в (2) и намираме $A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2 = n.(R^2 - OG^2 + PG^2)$ (3). От (1) и (3) следва, че $n.(R^2 - OP^2) = n.(R^2 - OG^2 + PG^2)$ или $OP^2 + PG^2 = OG^2$. От теоремата, обратна на Питагоровата, следва, че $\angle OPG = 90^\circ$. Това означава, че точката P описва сфера с диаметър OG , която е вътре в дадената сфера S , защото точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ са върху S , а G е вътрешна за S . Остава да покажем, че за всяка точка P от сферата с диаметър OG е изпълнено равенството (1). Тъй като $\angle OPG = 90^\circ$, от Питагоровата теорема имаме $OP^2 + PG^2 = OG^2$, т.е. $PG^2 - OG^2 = -OP^2$. Но равенството (3) е в сила за произволна точка P и затова имаме $A_1P^2 + A_2P^2 + \dots + A_nP^2 = n.(R^2 - OP^2)$, което е (1). С това е доказано, че търсеното множество от точки P е сфера с диаметър OG .