

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2014

Задача 1. Намерете цифрите a , b , c и d в десетична бройна система, ако е изпълнено равенството $\sqrt{abacab} = \overline{dab}$.

Йон Патралику, Крайова, Румъния

Решение: (гл. ас. д-р Ирина Вутова). Равенството $\sqrt{abacab} = \overline{dab}$ е еквивалентно с $\overline{abacab} = (\overline{dab})^2$. Ще направим анализ на задачата: (1) Цифрите a , b , c и d са две по две различни; (2) Цифрата a е различна от 0 (a е първа цифра в числото $\overline{abacab}$); (3) Единиците на числото $\overline{dab}$ и на неговия квадрат ($\overline{abacab}$) са равни (на b); (4) Единиците и десетиците на числото $\overline{dab}$ (b и a) са съответно равни на единиците и десетиците на неговия квадрат ($\overline{abacab}$); (5) Единиците и десетохилядите на числото $\overline{abacab}$ са равни (на b); (6) Десетиците, хилядите и стохилядите на числото $\overline{abacab}$ са равни (на a). Ще търсим решение на задачата чрез пълно изчерпване на всички случаи. От условие (3) следва, че $b \in \{0, 1, 5, 6\}$. Ще разгледаме всеки от тези случаи поотделно. 1) Ако $b = 0$, последните две цифри на числото $\overline{abacab}$ ще бъдат равни на нула, т.е. $a = b = 0$. Това обаче противоречи на условие (2). Следователно $b \neq 0$. 2) Ако $b = 1$, разглеждаме квадратите на всички двуцифрени числа, които имат последна цифра 1 (за които е изпълнено (1)), т.е. $21^2 = 441$, $31^2 = 961$, $41^2 = 1681$, $51^2 = 2601$, $61^2 = 3721$, $71^2 = 5041$, $81^2 = 6561$, $91^2 = 8281$. В тази редица от числа не съществува число, което удовлетворява условие (4). Следователно $b \neq 1$. 3) Ако $b = 5$, то последните две цифри на числото $(\overline{dab})^2$ са 2 и 5, което според (4) означава, че $a = 2$. Разглеждаме квадратите на всички трицифрени числа, последните две цифри на които са 2 и 5 (за които е изпълнено (1)), т.е. $125^2 = 15625$, $325^2 = 105625$, $425^2 = 180625$, $625^2 = 390625$, $725^2 = 525625$, $825^2 = 680625$, $925^2 = 855625$. В тази редица от числа не съществува число, което удовлетворява условие (6). Следователно $b \neq 5$. 4) Ако $b = 6$, разглеждаме квадратите на всички двуцифрени числа, които имат последна цифра 6 (за които е изпълнено (1)), т.е. $16^2 = 256$, $26^2 = 576$, $36^2 = 1296$, $46^2 = 2116$, $56^2 = 3136$, $76^2 = 5776$, $86^2 = 7396$, $96^2 = 9216$. В тази редица от числа само 76 удовлетворява условие (4). Следователно $a = 7$. Сега разглеждаме квадратите на всички

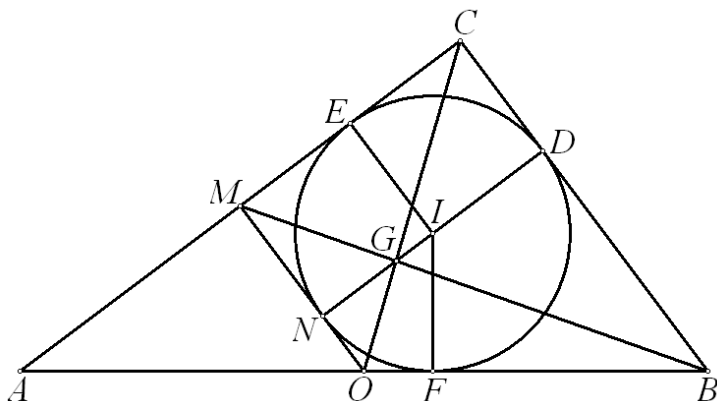
трицифрени числа, последните две цифри на които са 7 и 6 (за които е изпълнено (1)), т.е. $176^2 = 30976$, $276^2 = 76176$, $376^2 = 141376$, $476^2 = 226576$, $576^2 = 331776$, $876^2 = 767376$, $976^2 = 952756$. В тази редица от числа само 876 удовлетворява всички условия. Следователно $a = 7$, $b = 6$, $c = 3$ и $d = 8$.

Задача 2. В $\triangle ABC$ с медицентър G е вписана окръжност $k(I)$, допираща се до BC в точката D . Ако $\sphericalangle AIB = 135^\circ$, центърът I лежи върху отсечката DG , N е втората пресечна точка на правата DG с k и O е центърът на описаната за $\triangle ABC$ окръжност, да се определи каква част от лицето на $\triangle ABC$ са лицата на $\triangle OGI$ и четириъгълника $CION$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Тъй като AI и BI са ъглополовящи на ъглите съответно при върховете A и B , то $\sphericalangle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. От условието следва $90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 135^\circ$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и затова центърът на описаната окръжност O е средата на AB . Ако M е средата на BC , то медицентърът G е пресечната точка на BM и CO . Освен това OM е средна отсечка, поради което $OM \parallel BC$, $OM \perp AC$ и $OM = \frac{1}{2}BC$. Означаваме с r радиуса на вписаната окръжност $k(I)$. По условие точките D , I , G и N лежат на диаметър на $k(I)$. Затова $ID \perp BC$, $DN \perp OM$, $ID = r$ и $DN = 2r$. Следователно N е допирна точка на OM с $k(I)$. Нека E и F са допирните точки на $k(I)$ съответно с AC и BC . Тогава $IE \perp AC$, $IF \perp AB$, $IE = IF = r$, а четириъгълниците $CDIE$ и $MNIE$ са квадрати със страна r . Оттук $AF = AE = AM + ME = 3r$. Нека $BF = BD = x$. От Питагоровата теорема за $\triangle ABC$ имаме $(x+r)^2 + (4r)^2 = (x+3r)^2$, което след пресмятания води до равенството $x = 2r$. Оттук намираме, че $BC = 3r$, $AC = 4r$ и $AB = 5r$, т.е. страните BC , AC и AB образуват аритметична прогресия с разлика r . От $IN \parallel CM$ следва, че $\frac{GN}{CM} = \frac{OG}{OC} = \frac{1}{3}$, откъдето $GN = \frac{1}{3}CM = \frac{2}{3}r$. Следователно $IG = IN - GN = \frac{r}{3}$ и $ON = OM - MN = \frac{r}{2}$. Оттук намираме $S_{OGI} = \frac{1}{2}IG \cdot ON = \frac{r^2}{12}$. Освен това $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6r^2$. Следователно $S_{OIG} = \frac{1}{72}S_{ABC}$. Лицето на четириъгълника $CION$ намираме от равенството $S_{CION} = S_{CIOM} - S_{CMN}$. Тъй като $S_{CIOM} = S_{CIE} + S_{MNE} + S_{OIN} = \frac{1}{2}r^2 + r^2 + \frac{1}{2}r \cdot \frac{r}{2} = \frac{7}{4}r^2$ и

$S_{CMN} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot MN = r^2$, то $S_{CION} = \frac{3}{4} r^2 = \frac{1}{8} r^2$. С това задачата е решена.



Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ центърът на описаната около $\triangle ABD$ окръжност е O , а центърът на вписаната в $\triangle BCD$ окръжност е I . Ако ъглите $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABD = \beta$ и $\sphericalangle ADB = \gamma$ са остри, като са изпълнени равенствата $\sphericalangle DBC = 180^\circ - 2\gamma$ и $\sphericalangle BDC = 180^\circ - 2\beta$, да се докаже, че средите E, F и P съответно на AC, BD и OI лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Лесно се вижда, че $\sphericalangle BCD = 180^\circ - 2\alpha$. Тогава $\sphericalangle BID + \sphericalangle BAD = \left(90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BCD\right) + \sphericalangle BAD = 180^\circ$. Следователно точката I лежи върху описаната окръжност $k(O, R)$ на $\triangle ABD$. От друга страна, $\sphericalangle BCD + \sphericalangle BOD = (180^\circ - 2\alpha) + 2\alpha = 180^\circ$. Следователно точката O лежи на описаната окръжност на $\triangle BCD$. Тъй като O лежи на симетралата на BD , то O лежи и на ъглополовящата CI на $\triangle BCD$. Понеже $\sphericalangle BAI + \sphericalangle ABD = \sphericalangle BDI + \sphericalangle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) + \beta = 90^\circ$, то $AI \perp BD$. Нека K е средата на AI , $FP \cap AI = Q$, $BD \cap AI = L$ и E' е пресечната точка на правата FP с правата, успоредна на IC . Тъй като $KE \parallel IC$ и $KE = \frac{1}{2} IC$, то ако докажем, че $KE' = \frac{1}{2} IC$, ще следва, че $E' \equiv E$. С това ще бъде доказано, че точките E, F и P лежат на една права. Лесно се съобразява, че $KLFO$ е правоъгълник, а $OQIF$ е успоредник. Ако r е радиусът на вписаната в $\triangle BCD$

окръжност, то отгук следва $KQ = KI - QI = KI - OF = KI - KL = LI = r$. Тъй като $OF \parallel KQ$ и $OP \parallel KE'$, то $\triangle OPF \sim \triangle KE'Q$. Следователно $\frac{KE'}{KQ} = \frac{OP}{OF}$. Така получаваме последователно $KE' = \frac{KQ \cdot OP}{OF} = \frac{r \cdot OI}{2 \cdot OF} = \frac{r \cdot R}{2R \cos \alpha} = \frac{r}{2 \cos \alpha}$. Същевременно $IC = \frac{r}{\sin \angle BCI} = \frac{r}{\cos \alpha}$. Следователно $KE' = \frac{1}{2} IC$, което означава, че $E' \equiv E$. С това задачата е решена.

