

Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2013

Задача 1. а) Покажете, че ако $x \geq -1$, то $9x^3 + 3x^2 + 1 \geq 5x$.

б) Намерете реалните стойности на k , при които за всички $a, b, c \in [-1, +\infty)$, е изпълнено неравенството $3(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq k(a + b + c)$.

Лучиан Туцеску, Крайова, Димитру Савулеску, Букурещ, Румъния

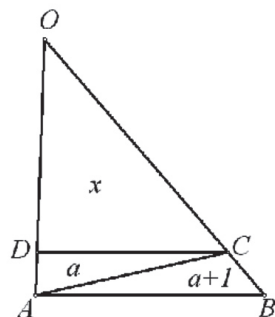
Решение: а) Разглежданото неравенство е еквивалентно с $(x+1)(3x-1)^2 \geq 0$, което е очевидно при $x \geq -1$.

б) От а) следват неравенствата $9a^3 + 3a^2 + 1 \geq 5a$, $9b^3 + 3b^2 + 1 \geq 5b$ и $9c^3 + 3c^2 + 1 \geq 5c$. След почленно събиране получаваме $3(a^3 + b^3 + c^3) + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{5}{3}(a + b + c)$. Затова $k = \frac{5}{3}$ е една от търсени-те стойности. От друга страна, при $a = b = c = -1$ е изпълнено $k \geq \frac{5}{3}$, а при $a = b = c = \frac{1}{3}$ – съответно $k \leq \frac{5}{3}$. Следователно $k = \frac{5}{3}$ е единствената стойност, при която е изпълнено неравенството.

Задача 2. Трапец се разделя чрез един от диагоналите си на триъгълници с лица a и $a + 1$. Да се намери лицето на триъгълника, образуван от голямата основа на трапеца и правите, върху които лежат бедрата му. При кои стойности на a лицето на този триъгълник е целочислено?

Милен Найденов, Варна

Решение: Нека $ABCD$ е трапец, за който $AB \parallel CD$ и $BC \cap AD = O$. Означаваме лицата на триъгълниците ABO , CDO и ACO съответно с S_{ABO} , S_{CDO} и S_{ACO} . От подобие на триъгълниците ABO и DCO следва $\frac{S_{ABO}}{S_{DCO}} = \frac{|OA|^2}{|OD|^2} = k^2$ (k е коефициентът на подобие). От друга страна, $\frac{S_{ACO}}{S_{DCO}} = \frac{|OA|}{|OD|} = k$. От тези съотношения следва, че



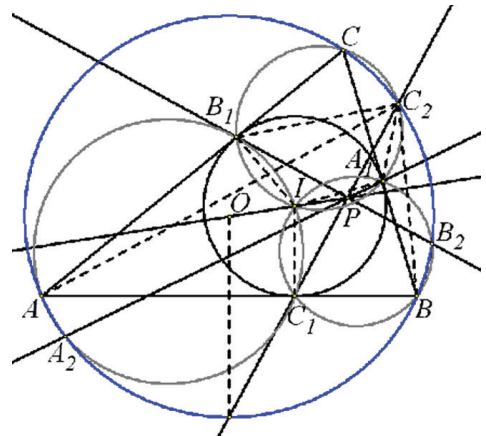
$S_{ACO}^2 = S_{DCO} \cdot S_{ABO}$. Сега при $S_{ACD} = a$, $S_{ABC} = a + 1$ и $S_{CDO} = x$ получаваме $(x + a)^2 = x(x + 2a + 1)$, откъдето $x = a^2$. Тогава $S_{ABO} = (a + 1)^2$. Оттук следва, че S_{ABO} е цяло число при всички естествени стойности на a .

Решение на Ирина Вутова. Нека $ABCD$ е трапец с основи AB и CD ($|AB| > |CD|$) и O е пресечна точка на правите AD и BC . (За краткост, лицето на $\triangle DAC$ ще запишем като S_{DAC} , а лицето на $\triangle CAB$ – като S_{CAB} .) Ще решим задачата по метода на векторно-алгебричното моделиране. За целта с λ , S и S_1 означаваме съответно отношението на основите AB и CD ($\lambda > 1$), лицето на $\triangle ODC$ и лицето на $\triangle OAB$. От условието (и въведените означения) непосредствено следва, че: $S_{CDA} = a$, $S_{CAB} = a + 1$, $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OC}$ и $S_1 = \lambda^2 \cdot S$. Оттук намираме $\overrightarrow{DA} = (\lambda - 1) \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{CB} = (\lambda - 1) \overrightarrow{OC}$. Следователно $S_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}| = (\lambda - 1) \cdot S$ и $S_{CBA} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot S$. Съгласно означенията последните равенства са еквивалентни съответно с $a = (\lambda - 1) \cdot S$ и $a + 1 = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot S$. Оттук намираме $\lambda = \frac{a+1}{a}$ и $S = a^2$. Тогава $S_1 = (a + 1)^2$. Лицето на $\triangle OAB$ е цяло число тогава и само тогава, когато числото a е естествено число.

Задача 3. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Нека C_2 е втората пресечна точка на описаните около $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle ABC$ окръжности, а точките A_2 и B_2 се получават аналогично по отношение съответно на върховете A и B . Да се докаже, че правите A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Нека I и O са центровете съответно на вписаната и описаната окръжност k_1 и k_2 на $\triangle ABC$. Ако $I \equiv O$, т.е. $\triangle ABC$ е равностраничен, твърдението на задачата е очевидно. Затова ще предполагаме, че $I \neq O$. Ще покажем, че правите A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 минават през външния център на хомотетия за k_1 и k_2 . От свойствата на вписаните ъгли следва, че $\sphericalangle B_1AC_2 = \sphericalangle A_1BC_2$ и $\sphericalangle C_2B_1C = \sphericalangle C_2A_1C$. Следователно



$\triangle AB_1C_2 \sim \triangle BA_1C_2$. Оттук $\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{AB_1}{BA_1} = \frac{AC_1}{BC_1}$. Следователно C_1C_2 е ъглополовяща на $\sphericalangle AC_2B$. Затова C_1C_2 минава през средата F на $\widehat{AB}$ от k_2 . Тъй като $OF \perp AB$ и $IC_1 \perp AB$, то радиусите OF и IC_1 съответно на k_2 и k_1 са успоредни. Затова C_1C_2 пресича централата OI в центъра на хомотетия P за k_1 и k_2 . По аналогичен начин се показва, че A_1A_2 и B_1B_2 минават през P .