

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2011

**Задача 1.** Едно цяло положително число  $n$  ще наричаме “интересно”, ако може да бъде записано във вида  $n = a + b + c$ , където  $a < b < c$  са цели положителни числа и  $a$  дели  $b$ , а  $b$  дели  $c$ . Да се докаже, че само краен брой цели положителни числа не са “интересни” и да се намери сумата им.

*Решение:* 1) Нека  $n$  е нечетно. Ако  $n > 5$ , то  $n = 1 + 2 + (n - 3)$  и затова е “интересно”. Остава да отбележим, че  $n = 1$ ,  $n = 3$  и  $n = 5$  не са “интересни”.

2) Нека  $n$  е четно.

2.1) Ако  $n \equiv 1 \pmod{3}$  и  $n > 4$ , то  $n = 1 + \frac{n-1}{3} + \frac{2(n-1)}{3}$  и затова е “интересно”. Останалото число  $n = 4$  от същия вид не е “интересно”. В случай, че  $n = 6m$  и  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , по същия начин намираме, че при  $m > 4$  числото  $n$  е “интересно”, а числата  $n = 6$  и  $n = 24$  от същия вид не са “интересни”.

2.2) Ако  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $n > 8$ , то  $n = 2 + \frac{n-2}{3} + \frac{2(n-2)}{3}$  и затова е “интересно”. Останалите две числа  $n = 2$  и  $n = 8$  от същия вид не са “интересни”. В случай, че  $n = 6m$  и  $m \equiv 2 \pmod{3}$  по същия начин намираме, че при  $m > 8$  числото  $n$  е “интересно”, а при  $m \leq 8$  само числото  $n = 12$  от същия вид не е “интересно”.

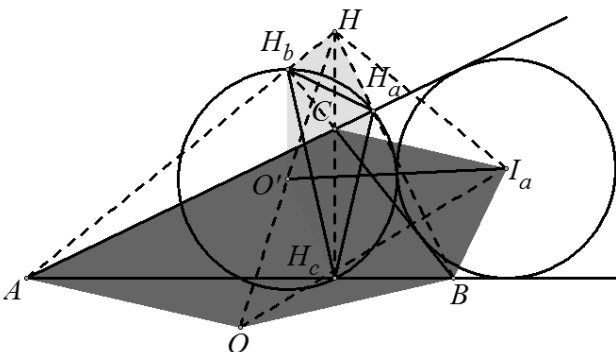
2.3) Ако  $n = 3^a \cdot p$  и  $a > 1$ , където  $p$  не се дели на 3, е изпълнено равенството  $n = p + 2p + (3^a - 3)p$ . Следователно тези  $n$  са “интересни”. Остава да отбележим, че случаят  $a = 1$  беше разгледан в 2.1) и 2.2).

Така получихме, че само деветте числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12 и 24 не са “интересни”. Сумата им е равна на 65.

**Задача 2.** Даден е триъгълник  $ABC$ , в който  $O$ ,  $H$  и  $I_a$  са съответно център на описаната окръжност, ортоцентър и център на външно вписаната окръжност, допираща се до страната  $BC$ . Да се докаже, че ако  $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 4$ , то триъгълникът  $OI_aH$  е равнобедрен.

Николай Белухов, Стара Загора

*Решение (Николай Белухов):* Нека  $H_a H_b H_c$  е педалният триъгълник на  $H$  спрямо  $\triangle ABC$ , а  $O'$  е центърът на неговата Ойлерова окръжност. Известно е, че триъгълниците  $ABC$  и  $H_c H_a H_b$  са подобни. Освен това лесно се вижда, че  $\triangle ABO \sim \triangle H_b H_c O'$  и  $\triangle BCI_a \sim \triangle H_b H_a H$ . Следователно



петоъгълниците  $AOBI_aC$  и  $H_c O' H_b H H_a$  са подобни като съставени от подобни триъгълници. Тъй като коефициентът на подобност на триъгълниците  $H_a H_b H_c$  и  $ABC$  е равен на  $2:1$ , то целите фигури имат същия коефициент на подобност. Следователно  $OI_a = 2O'H = OH$ . С това задачата е решена.

**Задача 3.** Дадени са правилен тетраедър  $T = A_1 A_2 A_3 A_4$  и точките  $\sim$  от правите  $A_i A_j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ). Нека  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$  са точките на Монж, а  $E_1, E_2, E_3$  и  $E_4$  са центровете на Ойлеровите сфери съответно за тетраедрите  $T_1 = A_1 A_{12} A_{13} A_{14}$ ,  $T_2 = A_{21} A_2 A_{23} A_{24}$ ,  $T_3 = A_{31} A_{32} A_3 A_{34}$  и  $T_4 = A_{41} A_{42} A_{43} A_4$ . Да се докаже, че:

- 1) центърът на тежестта на точките  $H_1, H_2, H_3$ , и  $H_4$  съвпада с центъра на  $T$ ;
- 2) ако ориентираните обеми на  $T, T_1, T_2, T_3$  и  $T_4$  са съответно  $V, V_1, V_2, V_3$  и  $V_4$ , то за ориентирания обем  $\bar{V}$  на тетраедъра  $H_1 H_2 H_3 H_4$  е изпълнено равенството  $\bar{V} = \frac{1}{4}(V - V_1 - V_2 - V_3 - V_4)$ ;
- 3) правите  $A_1 E_1, A_2 E_2, A_3 E_3$  и  $A_4 E_4$  се пресичат в една точка;
- 4) правите  $l_1 = H_1 E_1, l_2 = H_2 E_2, l_3 = H_3 E_3$  и  $l_4 = H_4 E_4$  са успоредни съответно на равнините  $\alpha_1 = (A_2 A_3 A_4), \alpha_2 = (A_3 A_4 A_1), \alpha_3 = (A_4 A_1 A_2)$  и  $\alpha_4 = (A_1 A_2 A_3)$ ;
- 5) тетраедърът  $B_1 B_2 B_3 B_4$ , получаващ се като част от пространството, заградено от равнините, минаващи през правите  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  и успоредни съответно на  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4$ , е хомотетичен на  $T$ .

Веселин Ненков, Бели Осъм

**Решение (Веселин Ненков):** Ще използваме барицентрични координати с координатен тетраедър  $A_1A_2A_3A_4$ , като  $A_1(1,0,0,0)$ ,  $A_2(0,1,0,0)$ ,  $A_3(0,0,1,0)$  и  $A_4(0,0,0,1)$ . Нека  $A_{12}(\lambda_{12}, \lambda_{21}, 0, 0) \in A_1A_2$ ,  $A_{13}(\lambda_{13}, 0, \lambda_{31}, 0) \in A_1A_3$ ,  $A_{14}(\lambda_{14}, 0, 0, \lambda_{41}) \in A_1A_4$ ,  $A_{23}(0, \lambda_{23}, \lambda_{32}, 0) \in A_2A_3$ ,  $A_{24}(0, \lambda_{24}, 0, \lambda_{42}) \in A_2A_4$ ,  $A_{34}(0, 0, \lambda_{34}, \lambda_{43}) \in A_3A_4$ . Нека  $L_{23}$ ,  $L_{34}$  и  $L_{42}$  са средите съответно на отсечките  $A_{12}A_{13}$ ,  $A_{13}A_{14}$  и  $A_{14}A_{12}$ . Тъй като равнините, минаващи през  $L_{23}$ ,  $L_{34}$  и  $L_{42}$ , перпендикулярни съответно на правите  $A_1A_{14}$ ,  $A_1A_{12}$  и  $A_1A_{13}$  се пресичат в точката на Монж  $H_1(x, y, z, t)$  на  $T_1$ , то  $L_{23}H_1 \perp A_1A_{14}$ ,  $L_{34}H_1 \perp A_1A_{12}$  и  $L_{42}H_1 \perp A_1A_{13}$ . Тогава  $\overrightarrow{L_{23}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{14}} = 0$ ,  $\overrightarrow{L_{34}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{12}} = 0$  и  $\overrightarrow{L_{42}H_1} \cdot \overrightarrow{A_1A_{13}} = 0$ . От тези равенства лесно се вижда, че са изпълнени:  $2x - 2t = \lambda_{12} + \lambda_{13}$ ,  $2x - 2z = \lambda_{12} + \lambda_{14}$  и  $2x - 2y = \lambda_{13} + \lambda_{14}$ , които заедно с равенството  $x + y + z + t = 1$  образуват система от четири линейни уравнения с четири неизвестни. След решаването на тази система получаваме

$$(1) H_1 \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} + \lambda_{13} - \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4} \right).$$

По аналогичен начин се получават

$$(2) H_2 \left( \frac{\lambda_{21} - \lambda_{23} - \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{21} + \lambda_{23} - \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{21} - \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4} \right),$$

$$H_3 \left( \frac{\lambda_{31} - \lambda_{32} - \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{31} + \lambda_{32} - \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{31} - \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4} \right),$$

$$H_4 \left( \frac{\lambda_{41} - \lambda_{42} - \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{41} + \lambda_{42} - \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{41} - \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right).$$

От (1) и (2) лесно се вижда, че центърът на тежестта на точките  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  и  $H_4$  е точката  $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ , която е центърът на  $T$ . С това е доказано 1).

Ако точките  $M_i(x_i, y_i, z_i, t_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) са върхове на тетраедър  $M_1M_2M_3M_4$  с ориентиран обем  $V_0$ , то е изпълнено

$$(3) \quad V_0 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} \cdot V$$

От (1), (2) и (3) следва

$$\bar{V} = \frac{1}{4}(1 - \lambda_{21}\lambda_{31}\lambda_{41} - \lambda_{12}\lambda_{32}\lambda_{42} - \lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{43} - \lambda_{14}\lambda_{24}\lambda_{34}) \cdot V.$$

От друга страна от (3) следват още равенствата  $V_1 = \lambda_{21}\lambda_{31}\lambda_{41} \cdot V$ ,  $V_2 = \lambda_{12}\lambda_{32}\lambda_{42} \cdot V$ ,  $V_3 = \lambda_{13}\lambda_{23}\lambda_{43} \cdot V$  и  $V_4 = \lambda_{14}\lambda_{24}\lambda_{34} \cdot V$ . Така от последните пет равенства следва 2).

Ако  $G_1$  е медицентърът на  $T_1$ , то  $G_1 \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21}}{4}, \frac{\lambda_{31}}{4}, \frac{\lambda_{41}}{4} \right)$ . Тога-

ва от (1) и векторното равенство  $\overrightarrow{OE_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OH_1} + 2\overrightarrow{OG_1})$ , където  $O$  е произволна точка в пространството, се получава

$$E_1 \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} + 3}{12} \right).$$

От друга страна уравненията на правата  $A_1G$  са следните:

$$x = 1 - \frac{3}{4} \cdot p, \quad y = \frac{1}{4} \cdot p, \quad z = \frac{1}{4} \cdot p, \quad t = \frac{1}{4} \cdot p, \quad p \in R,$$

откъдето се вижда, че  $E_1 \in A_1G$ . Аналогично се показва, че  $E_2 \in A_2G$ ,  $E_3 \in A_3G$  и  $E_4 \in A_4G$ . С това 3) е доказано.

Тъй като първата координата на вектора

$$\overrightarrow{G_1H_1} \left( 0, \frac{2\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14}}{4}, \frac{-\lambda_{12} + 2\lambda_{13} - \lambda_{14}}{4}, \frac{-\lambda_{12} - \lambda_{13} + 2\lambda_{14}}{4} \right)$$

е нула, то  $l_1 \parallel \alpha_1$ . Аналогично се вижда, че  $l_2 \parallel \alpha_2$ ,  $l_3 \parallel \alpha_3$  и  $l_4 \parallel \alpha_4$ . С това е доказано 4).

За да докажем 5), определяме уравненията на равнините  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\alpha_1 : x = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 1}{4}, \quad \alpha_2 : y = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 1}{4},$$

$$\alpha_3 : z = \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \quad \alpha_4 : t = \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4}.$$

От тези уравнения намираме върховете на тетраедъра  $B_1 B_2 B_3 B_4$ :

$$\begin{aligned} B_1 & \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} - 5}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_2 & \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} - 5}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_3 & \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} - 5}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{4} \right), \\ B_4 & \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{4}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{4}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{4}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} - 5}{4} \right). \end{aligned}$$

Разглеждаме точката

$$M \left( \frac{\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} + 1}{10}, \frac{\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24} + 1}{10}, \frac{\lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34} + 1}{10}, \frac{\lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43} + 1}{10} \right).$$

Тогава са изпълнени равенствата  $\overrightarrow{MB_k} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MA_k}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Следователно  $B_1 B_2 B_3 B_4$  е хомотетичен на  $A_1 A_2 A_3 A_4$  с център на хомотетия точката  $M$  и коефициент  $-\frac{3}{2}$ .

С това задачата е решена.