

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2018

Задача 1. Да се реши уравнението

$$|x - |2x + |3x - |4x + \dots + |2017x - |2018x|| \dots| = 2018.$$

Росен Николаев, Дико Суружон, Варна

Решение. Въвеждаме означението

$f_{2k+1}(x) = |(2k+1)x - |(2k+2)x + |(2k+3)x - |(2k+4)x + \dots + |2017x - |2018x|| \dots|$,
където $k = 0, 1, 2, \dots, 1008$. Съгласно това означение разглежданото уравнение придобива вида $f_1(x) = 2018$. Тъй като $f_1(0) = 0$, то $x = 0$ не е решение на уравнението. Затова са възможни само случаите 1) $x > 0$ и 2) $x < 0$. Разглеждаме двата случая поотделно.

Случай 1): при $x > 0$ е изпълнено равенството $|x| = x$. Тогава имаме:

$$\begin{aligned} f_{2017}(x) &= |2017x - |2018x|| = |-x| = x, \\ f_{2015}(x) &= |2015x - |2016x + |2017x - |2018x|| = |2015x - |2016x + f_{2017}(x)|| = \\ &= |2015x - |2016x + x|| = |2015x - 2017x| = 2x. \end{aligned}$$

Тези равенства ни дават основание да допуснем, че $f_{2k+1}(x) = (1009 - k)x$. Горните равенства се получават при $k = 1008$ и $k = 1007$. Ще докажем, че е изпълнено и равенството $f_{2k-1}(x) = (1009 - (k-1))x = (1010 - k)x$, което ще означава, че $f_{2k+1}(x) = (1009 - k)x$ е вярно за всички $k = 0, 1, 2, \dots, 1008$. От дефиницията на $f_{2k+1}(x)$ и допускането имаме

$$\begin{aligned} f_{2k-1}(x) &= |(2k-1)x - |2kx + f_{2k+1}(x)|| = |(2k-1)x - 2kx - f_{2k+1}(x)| = \\ &= |-x - (1009 - k)x| = |-(1010 - k)x| = (1010 - k)x \end{aligned}$$

(използвайки сме, че $k < 1010$).

Сега при $k = 0$ получаваме $f_1(x) = 1009x$. Следователно при $x > 0$ даденото уравнение се свежда до $1009x = 2018$, откъдето получаваме, че то има решение $x = 2$.

Случай 2): при $x < 0$ е изпълнено равенството $|x| = -x$. Тогава имаме:

$$f_{2017}(x) = |2017x - |2018x|| = |2017x + 2018x| = -4035x,$$

$$f_{2015}(x) = |2015x - |2016x + |2017x - |2018x||| = |2015x - |2016x + f_{2017}(x)|| = \\ = |2015x - |2016x - 4035x|| = |2015x - |-2019x|| = |2015x + 2019x| = |4034x| = -4034x.$$

Тезиравенстванидаватоснованиедадопуснем, че $f_{2k+1}(x) = -(3027+k)x$. Горните равенства се получават при $k=1008$ и $k=1007$. Ще докажем, че е изпълнено и равенството $f_{2k-1}(x) = -(3027+(k-1))x = -(3026+k)x$, което ще означава, че $f_{2k+1}(x) = -(3027+k)x$ е вярно за всички $k=0,1,2,\dots,1008$. От дефиницията на $f_{2k+1}(x)$ и допускането имаме

$$f_{2k-1}(x) = |(2k-1)x - |2kx + f_{2k+1}(x)|| = |(2k-1)x - |2kx - (3027+k)x|| = \\ = |(2k-1)x - |k-3027||x| = |(2k-1)x - (k-3027)x| = |(3026+k)x| = -(3026+k)x.$$

Сега при $k=0$ получаваме $f_1(x) = -3027x$. Следователно при $x < 0$ даденото уравнение се свежда до $-3027x = 2018$, откъдето получаваме, че то има решение $x = -\frac{2}{3}$.

Като обобщим разгледаните случаи, установяваме, че даденото уравнение има две решения: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , за който $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $1 < \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 2$. През ортоцентъра H на $\triangle ABC$ да се построи права, която пресича страните AC и BC съответно в точки M и N , така че стойността на израза $\operatorname{tg} \alpha \cdot S_{AMN} + \operatorname{tg} \beta \cdot S_{BMN}$ да бъде най-малка.

Христо Лесов, Казанлък

Решение. Най-напред ще покажем, че ако за $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$, той е остроъгълен. Ако предположим, че $\alpha > 90^\circ$, то $\operatorname{tg} \alpha < 0$. Тъй като $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta > 1$, то $\operatorname{tg} \beta < 0$ и $\beta > 90^\circ$. Това би означавало, че $\alpha + \beta > 180^\circ$, което е невъзможно. Следователно $\alpha < 90^\circ$ и $\beta < 90^\circ$. Оттук $\operatorname{tg} \alpha > 0$ и $\operatorname{tg} \beta > 0$. За мярката на ъгъл γ при върха C на $\triangle ABC$ имаме

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1} > 0.$$

Следователно $\gamma < 90^\circ$. Така получаваме, че $\triangle ABC$ е остроъгълен. Тогава височините AD , BE , CF ($D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$) се пресичат във вътрешна за $\triangle ABC$ точка H . Сега ще докажем, че за всяка права h през H , пресичаща страните AC и BC съответно в точки M и N , е изпълнено равенството (1) $\operatorname{tg} \alpha \cdot S_{AMN} + \operatorname{tg} \beta \cdot S_{BMN} = \operatorname{tg} \gamma \cdot S_{CMN}$. Нека A_1 , B_1 , C_1 са точки от правата h ,

така че правите AA_1 , BB_1 и CC_1 са перпендикулярни на h (фиг. 1). Тъй като

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} MN \cdot AA_1, S_{BMN} = \frac{1}{2} MN \cdot BB_1, S_{CMN} = \frac{1}{2} MN \cdot CC_1, \text{ получаваме, че (1)}$$

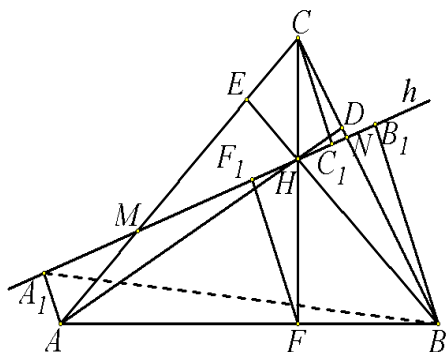
е еквивалентно с (2) $tg\alpha \cdot AA_1 + tg\beta \cdot BB_1 = tg\gamma \cdot CC_1$. Ако $FF_1 \perp h$ ($F_1 \in h$), то AA_1 , BB_1 , CC_1 и FF_1 са успоредни и от подобните триъгълници CC_1H и FF_1H имаме $CC_1 : FF_1 = CH : HF = (CF - HF) : HF = CF : HF - 1$.

От правоъгълните триъгълници ACF и AHF , в които $\angle CAF = \alpha$ и $\angle AHF = \angle ABC = \beta$ (като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене), получаваме $CF = AF \cdot tg\angle CAF = AF \cdot tg\alpha$ и $HF = AF \cdot ctg\angle AHF = AF \cdot ctg\beta$. Затова $CF : HF = tg\alpha : ctg\beta = tg\alpha \cdot tg\beta$ и $CC_1 : FF_1 = tg\alpha \cdot tg\beta - 1$. Оттук (3) $CC_1 = FF_1 \cdot (tg\alpha + tg\beta) : tg\gamma$. Нека FF_1 пресича A_1B в точка K . Тогава $FF_1 = FK + KF_1$, а от двойките хомотетични триъгълници (BFK, BAA_1) и (A_1KF_1, A_1BB_1) имаме $FK : AA_1 = BF : AB$ и $KF_1 : BB_1 = A_1K : A_1B = AF : AB$. От правоъгълните триъгълници ACF и BCF получаваме $AF = CF \cdot ctg\angle CAF = CF \cdot ctg\alpha$ и $BF = CF \cdot ctg\angle CBF = CF \cdot ctg\beta$. Оттук $AF : BF = tg\beta : tg\alpha$.

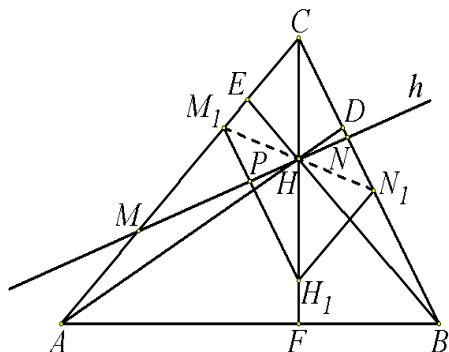
Така получаваме $AB : BF = AF : BF + 1 = (tg\alpha + tg\beta) : tg\alpha$ и $AB : AF = 1 + BF : AF = (tg\alpha + tg\beta) : tg\beta$.

Оттук $FK : AA_1 = BF : AB = tg\alpha : (tg\alpha + tg\beta)$, $KF_1 : BB_1 = AF : AB = tg\beta : (tg\alpha + tg\beta)$, $FK = tg\alpha \cdot AA_1 : (tg\alpha + tg\beta)$, $KF_1 = tg\beta \cdot BB_1 : (tg\alpha + tg\beta)$ и $FF_1 = (tg\alpha \cdot AA_1 + tg\beta \cdot BB_1) : (tg\alpha + tg\beta)$.

След заместване в (3) и преобразувания стигаме до равенството (2), което е равносилно на (1). Така задачата се свежда до определяне на положението на правата h през H , при което лицето на $\triangle CMN$ е най-малко.



Фигура 1



Фигура 2

От установеното равенство $CH:HF = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1$ и неравенството $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta < 2$ следва, че $CH:HF < 1$, т.е. $CH < HF$. Това означава, че върху отсечката HF има такава точка H_1 , че $HH_1 = CH$. През H_1 построяваме прави, успоредни на BC и AC , които пресичат страните AC и BC съответно в точки M_1 и N_1 (фиг. 2). Тогава $CM_1H_1N_1$ е успоредник, чиито диагонали CH_1 и M_1N_1 се пресичат в ортоцентъра H на $\triangle ABC$. Нека h е права през H , която пресича страните AC и BC съответно в точки M и N , а отсечката M_1H_1 пресича в точка P , при което $HP = HN$ и $\triangle HPM_1 \cong \triangle HNN_1$. Лицето на $\triangle CM_1N_1$ е сбор от лицата на четириъгълника CM_1HN и триъгълника HNN_1 , така че лицето на $\triangle CM_1N_1$ е равно на лицето на четириъгълника CM_1PN . Лицето на $\triangle CMN$ е сбор от лицата на четириъгълника CM_1PN и триъгълника MPM_1 , откъдето следва, че лицето на $\triangle CM_1N_1$ е по-малко от лицето на $\triangle CMN$ и следователно търсената права е M_1N_1 .

Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка T , продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка V , а точките M , N , P , Q , E и F са среди съответно на отсечките AB , BC , CD , DA , AC и BD . Вторите пресечни точки на описаните окръжности за двойките триъгълници (ABT, CDT) , (ADT, BCT) и (ADV, BCV) са съответно K_1 , K_2 и K_3 . Да се докаже, че ако точките K_1 , K_2 и B са колинеарни, то тройките точки (K_1, E, M) , (E, K_2, N) , (K_1, C, K_3) и (A, K_2, K_3) също са колинеарни.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Добре известно е, че четириъгълниците $MNPQ$ и $EMFP$ са успоредници с обща пресечна точка на диагоналите G . Ще докажем следната

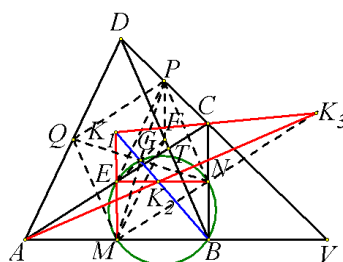
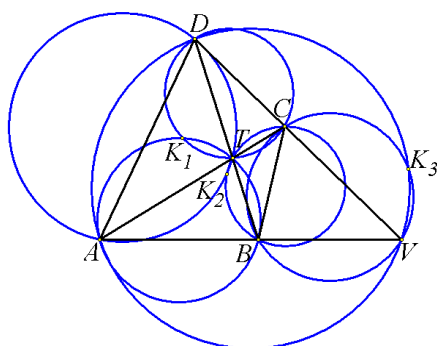
Лема. Изпълнени са следващите подобности между триъгълници:

$$\triangle AK_1B \sim \triangle QPN, \triangle DK_1C \sim \triangle QMN, \triangle BK_2C \sim \triangle MQP, \triangle DK_3C \sim \triangle EPF.$$

Доказателство. От свойствата на вписаните ъгли имаме $\sphericalangle K_1AC = \sphericalangle K_1BD$ и $\sphericalangle K_1CA = \sphericalangle K_1DB$. Следователно $\triangle K_1AC \sim \triangle K_1BD$.

Оттук $\frac{K_1A}{K_1B} = \frac{AC}{BD} = \frac{2QP}{2NP} = \frac{QP}{NP}$. Тъй като $QP \parallel AC$ и $NP \parallel BD$, то

$\sphericalangle AK_1B = \sphericalangle ATB = \sphericalangle QPN$. Така получаваме, че $\triangle AK_1B \sim \triangle QPN$. Аналогично се доказва подобността на останалите двойки триъгълници.



Преминуваме към решението на задачата. От $\triangle AK_1B \sim \triangle QPN$ следва, че $\angle K_1MA = \angle PGQ$ и $\angle ABK_1 = \angle QNP$. От $\triangle BK_2C \sim \triangle MQP$ следва, че $\angle K_2NC = \angle PGQ$ и $\angle CBK_2 = \angle PMQ$. От друга страна, колинеарността на точките K_1 , K_2 и B води до равенството $\angle ABK_1 + \angle CBK_2 = \angle ABC$. Следователно $\angle PGQ = \angle ABC$. Тогава $\angle K_1MA = \angle K_2NC = \angle ABC$. Така заключаваме, че $K_1M \parallel BC$ и $K_2N \parallel AB$. Затова тройките точки (K_1, E, M) и (E, K_2, N) са колинеарни. Тъй като $\angle MGN = \angle PGQ = \angle ABC$ и $\angle MEN = \angle ABC$ (от успоредника $MBNE$), то $\angle MGN = \angle MEN$. Оттук следва, че четириъгълникът $MNGE$ е вписан в окръжност. Следователно $\angle MEG + \angle MNG = 180^\circ$. Но $\angle MEG = \angle EFP$ и $\angle EFP = \angle DCK_3$ (от лемата имаме $\triangle DK_3C \sim \triangle EPF$). Следователно $\angle MEG = \angle DCK_3$. В същото време от лемата имаме $\triangle DK_1C \sim \triangle QMN$ и затова $\angle MNG = \angle MNQ = \angle K_2CD$. Оттук следва, че $\angle DCK_3 + \angle K_1CD = 180^\circ$. Следователно точките K_1 , C и K_3 са колинеарни. По подобен начин се доказва, че A , K_2 и K_3 са колинеарни. С това задачата е решена.