

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2017

Задача 1. Иван, Петър и Мариян събирали орехи с различни по големина кошници. В кошницата на Иван могат да се съберат най-много 70 ореха, в кошницата на Петър – най-много 170 ореха, а в тази на Мариян – най-много 300 ореха. Иван събрал в кошницата си известно количество орехи и ги преброил по три начина: когато ги вземал по два, накрая оставал един, когато ги вземал по три, накрая оставали два, а когато ги вземал по четири, накрая оставали три. Тъй като на Иван му харесало числото с тези свойства, той събрал в кошницата си още четири пъти същото количество орехи. Петър също събрал в кошницата си определено количество орехи и като ги преброил, установил, че: когато ги вземал по два, накрая оставал един, когато ги вземал по три, накрая оставали два, а когато ги вземал по пет, накрая оставали три. След това той събрал в кошницата си още един път същото количество орехи. За броя на орехите, които Мариян събрал в кошницата си, установил: когато ги вземал по три, накрая оставали два, когато ги вземал по четири, накрая оставали три, когато ги вземал по пет, накрая оставали четири. Колко е общият брой орехи, които са събрали Иван, Петър и Мариян, ако броят на орехите, които всеки от тях е събрал в своята кошница, е възможно най-голямото число със съответните свойства.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: нека първия път Иван е събрал I на брой орехи. Тогава числото $I = 12.i - 1$ при деление на 2, 3 и 4 дава съответно остатък 1, 2 и 3. Тъй като при $i = 6$ се получава $I = 12.6 - 1 = 71$, то най-голямото количество орехи (с посочените свойства), което Иван може да събере в една кошница, е $I = 12.5 - 1 = 59$. Следователно Иван е събрал общо $5.59 = 295$ ореха. Ако първият път Петър е събрал P на брой ореха, числото P може да се запише във вида $P = 30.p - 7$, тъй като при деление на 2, 3 и 5 се получават съответно остатъци 1, 2 и 3. При $p = 6$ се получава $P = 30.6 - 7 = 173$, затова най-голямото количество орехи (с посочените свойства), което Петър може да събере в една кошница, е $P = 30.5 - 7 = 143$. Следователно Петър е събрал $2.143 = 286$ ореха. Ако Мариян е събрал M на брой ореха, числото M може да се запише във вида $M = 60.m - 1$, тъй като при деление на 3, 4 и 5 се получават съответно остатъци 2, 3 и 4. При $m = 6$ се получава $M = 60.6 - 1 = 359$, затова най-голямото количество орехи

(с посочените свойства), което Мариян може да събере в своята кошница, е $M = 60.5 - 1 = 299$. Сега остава да съберем получените резултати и да установим, че общото количество орехи, които са събрали Иван, Петър и Мариян, е $5.I + 2.P + M = 295 + 286 + 299 = 880$.

Задача 2. Дадени са два неподобни триъгълника Δ_1 и Δ_2 . Страните на триъгълника Δ_k са a_k , b_k и c_k , а ъглите му имат мерки α_k , β_k и γ_k ($k=1,2$).

Ако $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + b_1}{a_1 + b_2} = \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}}$, да се докаже, че $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека R_i е радиусът на описаната около триъгълника Δ_i ($i=1,2$) окръжност. От равенството $\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{c_1}}$ и синусовата теорема

следва $R_1 \sin^2 \beta_1 = R_2 \sin^2 \beta_2$. Записваме равенството $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + b_1}{a_1 + b_2}$ във вида $a_1 b_2 + b_2^2 = a_2 b_1 + b_1^2$. От това равенство и синусовата теорема имаме $R_1 R_2 \sin \alpha_1 \sin \beta_2 + R_2^2 \sin^2 \beta_2 = R_1 R_2 \sin \alpha_2 \sin \beta_1 + R_1^2 \sin^2 \beta_1$. Оттук и от предишното равенство получаваме

$$\sin(\beta_1 + \gamma) \sin \beta_2 + \sin^2 \beta_1 = \sin(\beta_2 + \gamma) \sin \beta_1 + \sin^2 \beta_2.$$

След преобразуване на двете страни на това равенство имаме

$$2 \sin \beta_1 \sin \frac{\beta_1 - \gamma - \beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1 + \gamma + \beta_2}{2} = 2 \sin \beta_2 \sin \frac{\beta_2 - \gamma - \beta_1}{2} \cos \frac{\beta_1 + \gamma + \beta_2}{2}.$$

Тъй като Δ_1 и Δ_2 не са подобни, то $\beta_2 \neq \alpha_1$, $\beta_1 + \gamma + \beta_2 \neq \pi$ и $\cos \frac{\beta_1 + \gamma + \beta_2}{2} \neq 0$. Затова от последното равенство следва

$$2 \sin \beta_1 \sin \frac{\beta_1 - \gamma - \beta_2}{2} = 2 \sin \beta_2 \sin \frac{\beta_2 - \gamma - \beta_1}{2}.$$

Оттук получаваме последователно

$$\cos \frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma}{2} - \cos \frac{3\beta_1 - \beta_2 - \gamma}{2} = \cos \frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma}{2} - \cos \frac{3\beta_2 - \beta_1 - \gamma}{2}$$

$$\text{и } 2 \sin(\beta_2 - \beta_1) \sin \frac{\gamma - \beta_1 - \beta_2}{2} = 0.$$

Отново от това, че Δ_1 и Δ_2 не са подобни, следва $\beta_1 \neq \beta_2$. Затова последното равенство води до $\gamma - \beta_1 - \beta_2 = 0$. Следователно $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$.

Задача 3. Дадени са три пръчки. Две от тези пръчки имат еднаква дължина, а дължината на третата е равна на сумата от дължините на първите две. От всяка пръчка по случаен начин е отчупено по едно парче. Каква е вероятността от трите парчета да е възможно да се построи триъгълник?

Милен Найденов, Варна

Решение: нека дадените пръчки имат дължини 1, 1 и 2, а дължините на отчупените от тях парчета са съответно x , y и z . Елементарното събитие се характеризира с наредената тройка (x, y, z) , за която са изпълнени неравенствата $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ и $0 < z < 2$. Затова разглеждаме (x, y, z) като точка в пространството и получаваме, че множеството на всички изходи се състои от точките, лежащи в паралелепипеда $OABCNKLM$, който има за основа квадрат $OABC$ със страна 1 и височина с дължина 2. Обемът на този паралелепипед е $V_{OABCNKLM} = 2$. Благоприятните събития удовлетворяват условията $y + z > x$, $z + x > y$ и $x + y > z$. Ако D , E , H и T са средите съответно на околните ръбове ON , BL , AK и CM , то точките O , B и H лежат в равнина с уравнение $-x + y + z = 0$, точките O , B и T лежат в равнина с уравнение $x - y + z = 0$ и точките O , T , L и H лежат в равнина с уравнение $x + y - z = 0$. Следователно благоприятните събития се характеризират с точките в четириъгълната пирамида $OTLHB$ с основа $OTLH$ и връх B . За обема ѝ намираме

$$\begin{aligned} V_{OTLHB} &= V_{HETL} + V_{HETOB} = V_{HETL} + V_{OABCDHET} - (V_{BOHA} + V_{BOTC} + V_{HTLD}) = \\ &= \frac{1}{6} + 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Следователно търсената вероятност е равна на $\frac{V_{OTLHB}}{V_{OABCNKLM}} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$.