

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2016

Задача 1. Редицата на Фибоначи $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ се дефинира с равенствата $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$. Да се докаже, че всяка от редиците $\{4f_n^2 + 1\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{2f_n^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$ съдържа безброй много двойки съседни членове, които се делят на 5.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: в началото ще докажем следната

Лема. За всяко $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ числата на Фибоначи притежават свойствата:

- а) последната цифра на числата $2f_{10k}^2$ и $2f_{10k+5}^2$ е 0;
- б) последната цифра на числата $2f_{10k+1}^2$, $2f_{10k+2}^2$, $2f_{10k+8}^2$ и $2f_{10k+9}^2$ е 2;
- в) последната цифра на числата $2f_{10k+3}^2$, $2f_{10k+4}^2$, $2f_{10k+6}^2$ и $2f_{10k+7}^2$ е 8.

Доказателство. Известно е, че всяко пето число на Фибоначи се дели на 5. Следователно са изпълнени сравненията: $2f_{5t}^2 \equiv 0 \pmod{10}$, $2f_{10k}^2 \equiv 0 \pmod{10}$, $2f_{10k+5}^2 \equiv 0 \pmod{10}$. Освен това за числата на Фибоначи е изпълнена следната рекурентна зависимост

$$\begin{aligned} f_n^2 &= f_{n-1}f_{n+1} + (-1)^{n+1}. \text{ Оттук се получават следващите сравнения:} \\ 2f_{10k+1}^2 &= 2f_{10k}f_{10k+2} + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{10}, \quad 2f_{10k+2}^2 = 2(f_{10k} + f_{10k+1})^2 = \\ &= 2f_{10k}^2 + 4f_{10k}f_{10k+1} + 2f_{10k+1}^2 \equiv 0 + 0 + 2 \equiv 2 \pmod{10}, \quad 2f_{10k+3}^2 = 2(f_{10k+1} + f_{10k+2})^2 = \\ &= 2f_{10k+1}^2 + 4f_{10k+1}f_{10k+2} + 2f_{10k+2}^2 \equiv 2 + 4f_{10k+1}(f_{10k} + f_{10k+1}) + 2 \equiv 4 + 4f_{10k}f_{10k+1} + 4f_{10k+1}^2 \equiv \\ &\equiv 4 + 0 + 4 \equiv 8 \pmod{10}, \\ 2f_{10k+4}^2 &= 2(f_{10k+5} - f_{10k+3})^2 = 2f_{10k+5}^2 + 4f_{10k+5}f_{10k+3} + 2f_{10k+3}^2 \equiv \\ &\equiv 0 + 0 + 8 \equiv 8 \pmod{10}, \quad 2f_{10k+6}^2 = 2f_{10k+5}f_{10k+7} - 2 \equiv 0 + 8 \pmod{10}, \\ 2f_{10k+7}^2 &= 2(f_{10k+5} + f_{10k+6})^2 = 2f_{10k+5}^2 + 4f_{10k+5}f_{10k+6} + 2f_{10k+6}^2 \equiv 0 + 0 + 8 \equiv 8 \pmod{10}, \\ 2f_{10k+8}^2 &= 2(f_{10k+6} + f_{10k+7})^2 = 2f_{10k+6}^2 + 4f_{10k+6}f_{10k+7} + 2f_{10k+7}^2 \equiv 8 + 4(f_{10k+7} - f_{10k+5})f_{10k+7} + 8 \equiv \\ &\equiv 16 + 4f_{10k+7} - 4f_{10k+5}f_{10k+7} \equiv 6 + 16 - 0 \equiv 2 \pmod{10}, \\ 2f_{10k+9}^2 &= 2f_{10k+8}f_{10k+10} + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Преминаваме към решението на задачата. Подредиците $\{4f_{10i-1}^2 + 1\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{4f_{10k+2}^2 + 1\}_{k=1}^{\infty}$ (а също така $\{4f_{10k+8}^2 + 1\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{4f_{10k+9}^2 + 1\}_{k=1}^{\infty}$) заедно съ-

държат двойки последователни членове на $\{4f_n^2 + 1\}_{n=1}^{\infty}$. От твърдение б) на лемата следва, че тези подредици съдържат двойки последователни членове на $\{4f_n^2 + 1\}_{n=1}^{\infty}$, които се делят на 5. Подредиците $\{2f_{10k+3}^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{2f_{10k+4}^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$ (а също така $\{2f_{10k+6}^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{2f_{10k+7}^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$) заедно съдържат двойки последователни членове на $\{2f_n^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$. От твърдение в) на лемата следва, че тези подредици съдържат двойки последователни членове на $\{2f_n^2 + 7\}_{n=1}^{\infty}$, които се делят на 5. С това задачата е решена.

Задача 2. Дадени са $\triangle ABC$ и окръжност k с център медицентъра на $\triangle ABC$. Ако M е точка от k , да се докаже, че сумата $AM^2 + BM^2 + CM^2$ не зависи от положението на M върху k .

Милен Найденов, Варна

Решение: нека O е медицентърът на $\triangle ABC$, а C_1 е средата на AB . Разглеждаме координатна система Oxy , оста Oy , която е перпендикулярна на AB и е насочена към AB . Оста Ox е насочена към страната AC . С γ означаваме разстоянието от C_1 до Oy , а с h – разстоянието OC_2 от C до AB . Въвеждаме още следните означения $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $c_1 = \frac{c}{2}$,

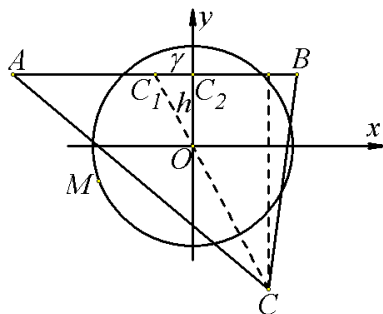
$a' = c_1 + \gamma$, $a'' = c_1 - \gamma$. Координатите на върховете на $\triangle ABC$ спрямо Oxy са следните $A(-a', h)$, $B(a'', h)$ и $C(2\gamma, -2h)$. Нека k има радиус R и $M(x, y)$ е произволна точка от k . Тогава имаме

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3(x^2 + y^2) + 2(a' + a'' - 2\gamma)x + 6h^2 + 4\gamma^2 + a'^2 + a''^2.$$

Тъй като $x^2 + y^2 = R^2$, получаваме

$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3R^2 + 6(h^2 + \gamma^2) + \frac{c^2}{2}$. От правоъгълния триъгълник OC_1C_2 и формулата, изразяваща медианата в триъгълника чрез страните му, следва $h^2 + \gamma^2 = OC_1^2 = \frac{1}{3}CC_1^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{3 \cdot 4}$. Следователно

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3R^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}. \text{ С това задачата е решена.}$$



Задача 3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ACB = 45^\circ$ и $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAD + 45^\circ$. Ако H е ортоцентърът на $\triangle ADB$, да се докаже, че $BH = AD - AB$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: радиуса на описаната около ABD окръжност означаваме с R . Освен това нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABD = \beta$, $\sphericalangle ADB = \delta$. Лесно се съобразява, че $BH = AD - AB$ е еквивалентно с $2R \cos \beta = 2R \sin \beta - 2R \sin \delta$, т.е. $\cos \beta = \sin \beta - \sin \delta$. Нека $AC \cap BD = T$ и $\sphericalangle BDC = x$.

Изпълнени са равенствата $\sphericalangle CTD = \sphericalangle TAD + \sphericalangle ADT = \frac{\alpha}{2} + \delta$ и

$x = 180^\circ - (\sphericalangle CTD + \sphericalangle TCD) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \delta + 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \beta - 45^\circ$. Тъй като

$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, от синусовата теорема за $\triangle BCD$ следва $\sin x = \frac{BC}{BD} \sin \sphericalangle BCD = \frac{BC}{BD} \sin \frac{\alpha}{2}$. Затова $\sin(\beta - 45^\circ) = \frac{BC}{BD} \sin \frac{\alpha}{2}$.

Сега от синусовата теорема за триъгълниците ABC и ABD получаваме съответно равенствата $BC = AB \cdot \frac{\sin \sphericalangle BAC}{\sin \sphericalangle ACB} = AB \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin 45^\circ}$ и

$BD = AB \cdot \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle ADB} = AB \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \delta}$. Разделяме почленно последните две

равенства и получаваме $\frac{BC}{BD} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin 45^\circ} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \delta}{2 \sin 45^\circ \cos \frac{\alpha}{2}}$. Оттук

$\sin(\beta - 45^\circ) = \frac{\sin \delta}{2 \sin 45^\circ \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. Следователно $\cos \beta = \sin \beta - \sin \delta$.

