

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2014

Задача 1. Намерете всички естествени четирицифрени числа $\overline{uxyv}$, за които са изпълнени равенствата $x + y = uv$ и $u + v = xy$.

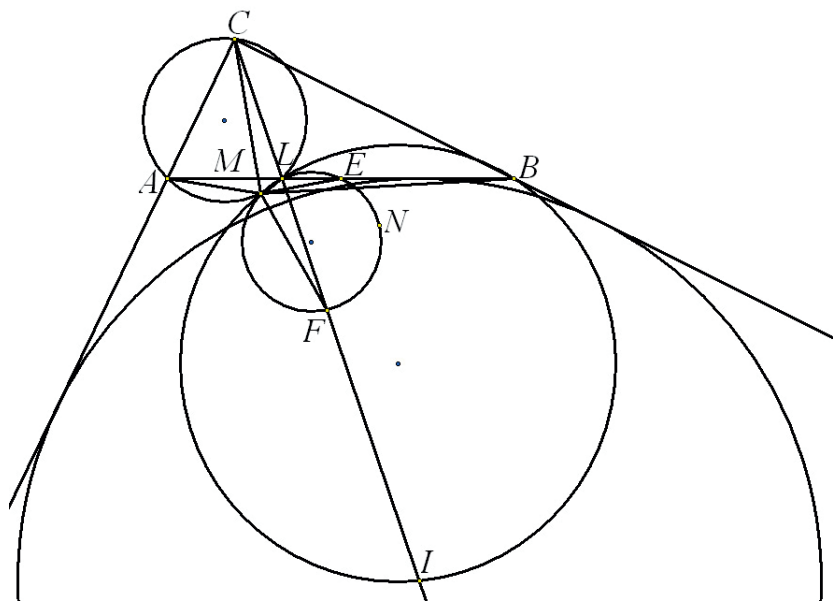
Милен Найденов, Варна

Решение: Събираме почленно равенствата и получаваме $x + y + u + v = xy + uv$. Оттук следва равенството $(x-1)(y-1) + (u-1)(v-1) = 2$. Последното равенство е изпълнено при $(x-1)(y-1) = 1$ и $(u-1)(v-1) = 1$; $(x-1)(y-1) = 2$ и $(u-1)(v-1) = 0$; $(x-1)(y-1) = 0$ и $(u-1)(v-1) = 2$. Оттук лесно се вижда, че търсените числа са: 2222, 5231, 1235, 3152, 3512, 5321, 1325, 2153 и 2513.

Задача 2. Ъглите при върховете A , B и C на $\triangle ABC$ са съответно α , β и γ , а M и N са такива точки от $\sphericalangle ACB$, че са изпълнени равенствата $\sphericalangle AMC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, $\sphericalangle BMC = \frac{3\alpha}{2}$, $\sphericalangle ANC = \frac{3\beta}{2}$ и $\sphericalangle BNC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$. Ако E е средата на AB , а L пресечната точка на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ с AB , да се докаже, че точките M , N , L и E лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Тъй като $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle LCB = \beta + \frac{\gamma}{2}$ и $\sphericalangle AMC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, то $\sphericalangle AMC = \sphericalangle ALC$ и точките A , M , L и C лежат на една окръжност. Предполагаме, че M лежи вън от $\triangle ABC$ (ако $M \in AB$, то $M \equiv L$ и твърдението на задачата е очевидно, а ако M лежи вътре в $\triangle ABC$, разсъжденията са аналогични). Нека I е втората пресечна точка на правата CL и окръжността, определена от точките M , L и B . Имаме равенствата $\sphericalangle BML = \sphericalangle BMC - \sphericalangle CML = \sphericalangle BMC - \sphericalangle CAL = \frac{3\alpha}{2} - \alpha = \frac{\alpha}{2}$. Тогава $\sphericalangle BIC = \sphericalangle BML = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle LBI = \sphericalangle CBI - \sphericalangle LBC = (180^\circ - \sphericalangle BIC - \sphericalangle BCI) - \sphericalangle LBC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} - \beta = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Следователно BI е външната ъглополовяща на $\triangle ABC$ при върха B . Получаваме, че I е центърът на външновписаната окръжност, съответна на страната AB . Понеже $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCI$ и $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MIC$, то $\triangle MBA \sim \triangle MIC$. Ако F е средата на CI , то ME и MF са съответни медиани в тези триъгълници и



Тодор Митев, Рысе

$$\begin{aligned} B_i &= y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+n-1} - y_{i+n} - y_{i+n+1} - \cdots - y_{i+2n-1} - y_{i+2n}, \\ C_i &= y_i + y_{i+1} + \cdots + y_{i+n-1} - y_{i+n} - y_{i+n+1} - \cdots - y_{i+2n-1} + y_{i+2n}. \end{aligned}$$

От условието следва $B_i \cdot C_i \geq 0$. Ясно е, че $B_p = B_q$ и $C_p = C_q$, когато $p \equiv q \pmod{2n+1}$. Оттук следва, че $C_i = -B_{i+n}$. Изображението $F : \{1, 2, \dots, 2n+1\} \rightarrow \{n+1, n+2, \dots, 3n+1\}$, дефинирано с равенството $F(k) = F(k+n)$, е биекция. Затова от зависимостите $B_i \cdot C_i \geq 0$ и $C_i = -B_{i+n}$ следва неравенството $(-1)^{2n+1} \left(\prod_{i=1}^{2n+1} B_i \right) \geq 0$. Последното е възможно само ако съществува i , при което $B_i = 0$. Без ограничение можем да предполагаме, че $i = 1$. Тогава $y_1 + y_2 + \dots + y_n = y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{2n+1}$.