

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2016

Задача 1. За всяко естествено число n да се намери растяща редица от естествени числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, за които е изпълнено равенството $x_1^2 + 2.x_2^2 + 3.x_3^2 + \dots + n.x_n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: от условието имаме $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$.
Затова $x_1 \geq 1, \quad x_2 \geq x_1 + 1 \geq 2, \quad x_3 \geq x_2 + 1 \geq 3, \quad \dots, \quad x_n \geq n$ и
 $x_1^2 \geq 1, \quad 2.x_2^2 \geq 2^3, \quad 3.x_3^2 \geq 3^3, \quad n.x_n^2 \geq n^3$. Оттук получаваме
 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = x_1^2 + 2.x_2^2 + 3.x_3^2 + \dots + n.x_n^2 \geq 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

В последното неравенство е изпълнено равенство при всяко n . Следователно единственото решение на задачата е редицата: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_n = n, \dots$

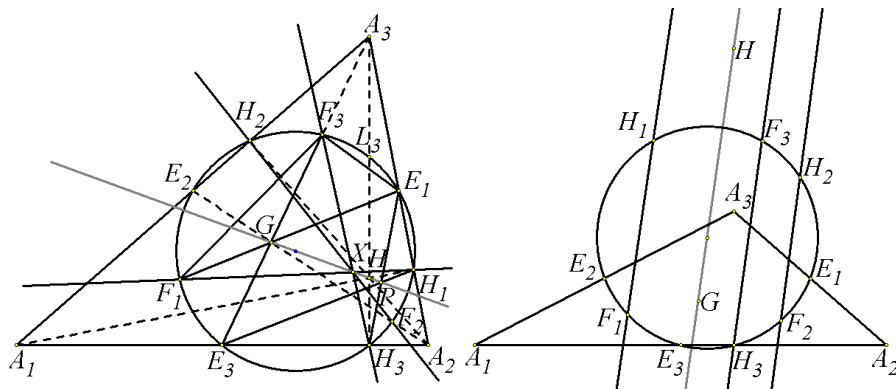
Задача 2. Нека в неравностранный триъгълник $A_1A_2A_3$ петите на височините към страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 са съответно H_1, H_2 и H_3 , а вторите пресечни точки на медианите към тези страни с Фойербаховата окръжност са съответно F_1, F_2 и F_3 . Да се докаже, че правите F_1H_1, F_2H_2 и F_3H_3 се пресичат в една точка от Ойлеровата права на $\Delta A_1A_2A_3$ или са успоредни на нея.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека точките E_1, E_2 и E_3 са средите съответно на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 . Достатъчно е да докажем, че двойките прави F_1H_1, F_3H_3 и F_1H_1, F_2H_2 се пресичат в точка от Ойлеровата права l на $\Delta A_1A_2A_3$. Тези точки ще бъдат общи за F_1H_1 и l и затова съвпадат. Оттук ще следва, че правите F_1H_1, F_2H_2 и F_3H_3 се пресичат в една точка от l (която може да е и безкрайна).

Нека $X = F_1H_1 \cap F_3H_3$ и $P = H_3E_1 \cap H_1E_3$. Точките E_i, F_i ($i=1,2,3$) лежат на една окръжност (Фойербаховата окръжност на $\Delta A_1A_2A_3$). Затова от теоремата на Паскал за точките $E_3, F_3, H_3, E_1, F_1, H_1$ следва, че точките $G = E_3F_3 \cap E_1F_1, X = F_3H_3 \cap F_1H_1$ и $P = H_3E_1 \cap H_1E_3$ лежат на една права l_1 .

От друга страна, двете тройки точки A_1, E_3, H_3 и A_3, E_1, H_1 са разположени върху две прави. Затова от теоремата на Пап следва, че точките $G = A_1E_1 \cap A_3E_3$, $P = E_3H_1 \cap H_3E_1$ и $H = A_1H_1 \cap H_3A_3$ лежат на една права l_2 . Правите l_1 и l_2 имат две общи точки G и P . Следователно $l_1 \equiv l_2$, т.е. точките G, X, P и H лежат на една права. Затова X лежи върху Ойлеровата права $l = GH$. По същия начин се доказва, че точката $Y = F_1H_1 \cap F_2H_2$ лежи върху l . С това задачата е решена.

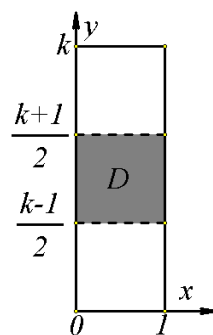


Задача 3. Пръчката l_1 е k пъти по-дълга от пръчката l_2 . Двете пръчки са счупени по случаен начин по на две парчета. Ако p е вероятността от получените четирите парчета да може да се построи четириъгълник, да се намерят стойностите на k , при които $\frac{1}{p}$ е куб на естествено число.

Милен Найденов, Варна

Решение: нека дължините на пръчките l_2 и l_1 са съответно 1 и k . Тогава получените четири парчета имат дължини $x, 1-x, y$ и $k-y$. Елементарното събитие се характеризира с два параметъра x и y , които може да се разглеждат като координати на точка в равнината.

Формулата за геометрична вероятност е $p = \frac{S_D}{S_\Omega}$, където Ω е правоъгълник, състоящ се от точките, за координатите на които са изпълнени неравенствата $0 < x < 1$ и $0 < y < k$, а S (множеството на благоприятните събития)



се състои от точките на Ω , координатите на които удовлетворяват условията:
 $x+1-x+y > k-y$ и $x+1-x+k-y > y$, т.е. $\frac{k+1}{2} < y < \frac{k-1}{2}$. Следователно $S_{\Omega} = k$ и $S_D = 1$. Тогава $p = \frac{1}{k}$ и $k = \frac{1}{p}$. Оттук се вижда, че $\frac{1}{p}$ е куб на естествено число, когато $k = 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$.