

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2014

Задача 1. Ако $a \geq 3$ е нечетно число и $k \geq 2$ е естествено число, да се намери остатъкът от делението на a^k с $\frac{a^2+1}{2}$.

Лучиан Туцеску, Крайова, Димитру Савулеску, Букурещ, Румъния

Решение: Означаваме с r търсения остатък. При $k = 2$ е изпълнено равенството $a^2 = \frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2-1}{2}$. Тъй като $\frac{a^2-1}{2} < \frac{a^2+1}{2}$, то $r = \frac{a^2-1}{2}$. Сега от равенството $a^2 = 2 \cdot \frac{a^2+1}{2} - 1$ се получава $a^{2k} = M \cdot \left(\frac{a^2+1}{2}\right) + (-1)^k$, където M е цяло число. Ако $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, търсеният остатък е $r = 1$. Ако $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $a^{2(2l+1)} \equiv -1 \equiv \frac{a^2+1}{2} - 1 \equiv \frac{a^2-1}{2} \pmod{\frac{a^2+1}{2}}$. В този случай получаваме, че $r = \frac{a^2-1}{2}$. Разглеждаме случая, при който $k = 3$. От релациите $a^3 = 2a \cdot \frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1) \cdot \frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1) \cdot \frac{a^2+1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2}$ и $\frac{(a-1)^2}{2} < \frac{a^2+1}{2}$ следва, че $r = \frac{(a-1)^2}{2}$. Като използваме, че $a^{4l} \equiv 1 \pmod{\frac{a^2+1}{2}}$, получаваме $a^{4l+3} \equiv a^3 \equiv \frac{(a-1)^2}{2} \pmod{\frac{a^2+1}{2}}$ и $a^{4l+1} \equiv a^{4l} \cdot a \equiv a \pmod{\frac{a^2+1}{2}}$. Сега, като обобщим получените резултати, имаме: При $k = 4l$, $k = 4l + 2$, $k = 4l + 3$ и $k = 4l + 1$ ($l \in \mathbb{N}$) е изпълнено съответно $r = 1$, $r = a$, $r = \frac{a^2-1}{2}$ и $r = \frac{(a-1)^2}{2}$.

Задача 2. В окръжност с център O е вписан триъгълник ABC с ортоцентър H . Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC , точката I е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, а O_9 е центърът на Ойлеровата окръжност за $\triangle ABC$. Да се докаже, че следващите твърдения са равносилни.

T_1 . Мерките на ъглите при върховете A , C и B образуват в този ред аритметична прогресия.

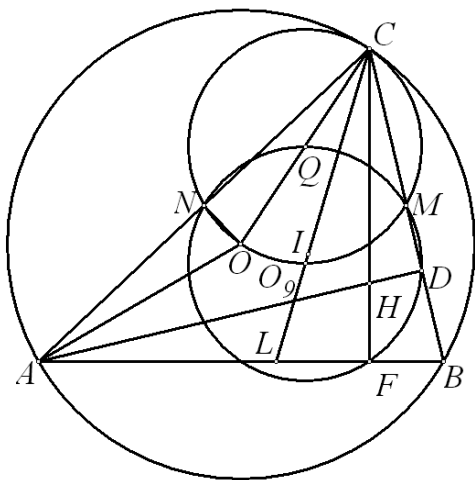
T_2 . Изпълнено е равенството $OI = IH$.

T_3 . Точките C, O, M, N и O_9 лежат на една окръжност.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: В началото ще отбележим, че за равностранен триъгълник ABC точките O, H, I и O_9 съвпадат и условието на задачата е изпълнено. Ще разгледаме общия случай на разностранен остроъгълен триъгълник ABC , вписан в окръжност k с център O и радиус R . Означаваме с α, γ и β мерките на ъглите съответно при върховете A, C и B . Те образуват в този ред аритметична прогресия тогава и само тогава, когато $\alpha + \beta = 2\gamma$ или $\alpha + \beta + \gamma = 3\gamma$. Оттук следва $\gamma = 60^\circ$. Затова твърдение T_1 е равносилно с твърдение T_4 : Изпълнено е равенството $ACB = 60^\circ$.

Тъй като $\triangle ABC$ е остроъгълен, точките O и H са вътрешни за него, като $ON \perp AC$, $\angle AON = \beta$. Ако правите AH и CH пресичат BC и AB съответно в точките D и F , то $AD \perp BC$ и $CF \perp AB$. От правоъгълните триъгълници CON и CBF намираме $\angle OCN = 90^\circ - \beta = \angle BCF = \angle HCD$. Ако CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на ACB , то $\angle OCL = \angle ACL - \angle OCN = \angle BCL - \angle HCD = \angle HCL$, което показва, че CL е ъглополовяща на $\angle OCN$. В правоъгълния триъгълник ACD имаме $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACB$ откъдето равенството $ACB = 60^\circ$ е изпълне-



но тогава и само тогава, когато $\angle CAD = 30^\circ$, т.е. $CD = \frac{1}{2} AC = CN$. Последното е равносилно с еднаквост на правоъгълните триъгълници CHD и CON . Следователно твърдение T_4 е равносилно с твърдение T_5 : Изпълнено е равенството $CH = CO$ и CL е ъглополовяща на $\angle OH$. Тъй като $I \in CL$, твърдения T_5 и T_2 са равносилни. Както е известно, центърът O_9 на Ойлеровата окръжност за ABC е средата на отсечката OH (вж. Права на Ойлер и окръжност на деветте точки за триъгълник, МИ, 2008, 1). Затова твърдение T_5 е

равносилно с $CO_9O = 90^\circ$ и CO се вижда от точките M, N и O_9 под ъгъл 90° . Това показва, че точките C, O, M, N и O_9 лежат на окръжност с диаметър $CO = R$. При това центърът Q на тази окръжност лежи върху Ойлеровата окръжност на $\triangle ABC$.

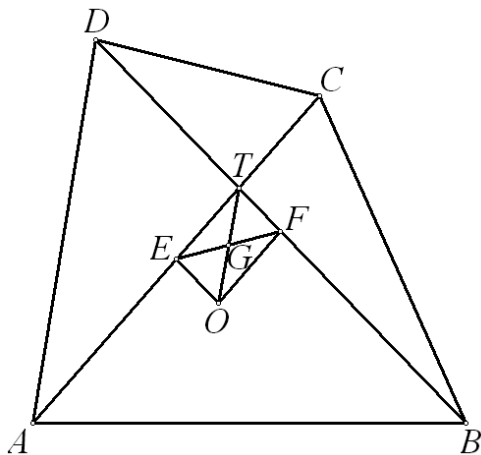
Задача 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $T = AC \cap BD$ е пресечната точка на диагоналите и $S_{ADT} = \frac{1}{2}(S_{ABT} + S_{CDT})$. Ако G е медицентърът на $ABCD$, да се докаже, че: а) $GT \parallel AD$; б) $GT < \frac{AD}{4}$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: а) Без ограничение можем да считаме, че $S_{ABT} \geq S_{CDT}$. От условието на задачата следва, че $S_{ABT} \geq S_{ADT} \geq S_{CDT}$, откъдето $BT \geq DT$ и $AT \geq CT$. Следователно средите E и F съответно на AC и BD лежат съответно на отсечките AT и BT . Означаваме мярката на

$\angle ATD$ с φ . Изпълнени са равенствата $S_{ADT} = \frac{1}{2} AT \cdot DT \cdot \sin \varphi$, $S_{ABT} = \frac{1}{2} AT \cdot BT \cdot \sin \varphi$ и $S_{CDT} = \frac{1}{2} CT \cdot DT \cdot \sin \varphi$. Сега от условието получаваме $2 \cdot AT \cdot DT = AT \cdot BT + CT \cdot DT$, което води до равенството (*) $\rightarrow \frac{BT - DT}{DT} = \frac{AT - CT}{AT}$. Медицентърът на $ABCD$ е средата на EF . Нека O е симетричната точка на T спрямо G . Четириъгълникът $EOFT$ е успоредник, откъдето следват равенствата

$EO = FT = BT - BF = BT - \frac{BT + DT}{2} = \frac{BT - DT}{2}$. Аналогично се показва, че $ET = \frac{AT - CT}{2}$. Сега от равенството (*) получаваме $\frac{EO}{DT} = \frac{ET}{AT}$. От $EO \parallel BD$ следва $\angle OET = \angle ATD$. Следователно $\triangle EOT \sim \triangle TDA$. Оттук заключаваме, че $\angle OTE = \angle TAD$, т.е. $GT \parallel AD$.



б) От $\triangle EOT \sim \triangle TDA$ следва още, че $\frac{TO}{AD} = \frac{EO}{DT}$. Оттук $TO = AD \cdot \frac{EO}{DT} = AD \cdot \frac{BT - DT}{2DT}$. Следователно $GT = \frac{TO}{2} = \frac{AD}{4} \cdot \left(\frac{BT}{DT} - 1 \right)$. За да докажем, че $GT < \frac{AD}{4}$, остава да проверим неравенството $\frac{BT}{DT} - 1 < 1$, което е еквивалентно с $BT < 2DT$, т.е. $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. Тъй като по условие $2S_{ADT} = S_{ABT} + S_{CDT}$, то $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. С това задачата е решена.