Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2014

Задача 1. Ако $a \geq 3$ е нечетно число и $k \geq 2$ е естествено число, да се намери остатъкът от делението на a^k с $\frac{a^2+1}{2}$.

Лучиан Туцеску, Крайова, Димитру Савулеску, Букурещ, Румъния

Решение: Означаваме с r търсения остатък. При $k = 2$ е изпълнено равенството $a^2 = \frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2-1}{2}$. Тъй като $\frac{a^2-1}{2} < \frac{a^2+1}{2}$, то $r = \frac{a^2-1}{2}$. Сега от равенството $a^2 = 2.\frac{a^2+1}{2} - 1$ се получава $a^{2k} = M.\left(\frac{a^2+1}{2}\right) + (-1)^k$, където M е цяло число. Ако $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, търсеният остатък е $r = 1$. Ако $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $a^{2(2l+1)} \equiv -1 \equiv \frac{a^2+1}{2} - 1 \equiv \frac{a^2-1}{2}\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$. В този случай получаваме, че $r = \frac{a^2-1}{2}$. Разглеждаме случая, при който $k = 3$. От релациите $a^3 = 2a\frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1)\frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1)\frac{a^2+1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2}$ и $\frac{(a-1)^2}{2} < \frac{a^2+1}{2}$ следва, че $r = \frac{(a-1)^2}{2}$. Като използваме, че $a^{4l} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$, получаваме $a^{4l+3} \equiv a^3 \equiv \frac{(a-1)^2}{2}\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$ и $a^{4l+1} \equiv a^{4l}.a \equiv a\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$. Сега, като обобщим получените резултати, имаме: При $k = 4l$, $k = 4l + 2$, $k = 4l + 3$ и $k = 4l + 3$ ($l \in \mathbb{N}$) е изпълнено съответно $r = 1$, $r = a$, $r = \frac{a^2-1}{2}$ и $r = \frac{(a-1)^2}{2}$.

Задача 2. В окръжност с център O е вписан триъгълник ABC с ортоцентър H. Точките M и N са средите съответно на страните BC и AC, точката I е център на вписаната в ΔABC окръжност, а O_9 е центърът на Ойлеровата окръжност за ΔABC. Да се докаже, че следващите твърдения са равносилни.

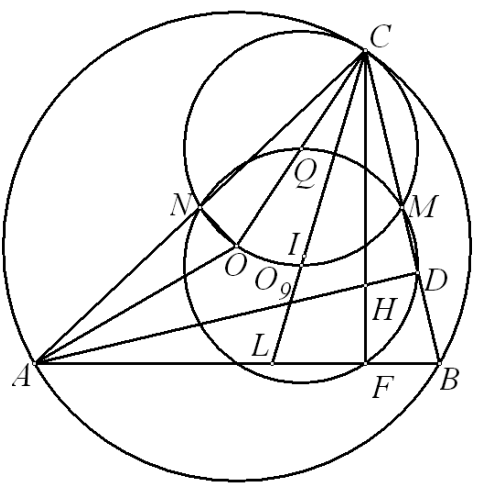
T_1. Мерките на ъглите при върховете A, C и B образуват в този ред аритметична прогресия.

T_2. Изпълнено е равенството $OI = IH$.

T_3. Точките C, O, M, N и O_9 лежат на една окръжност.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: В началото ще отбележим, че за равностранен триъгълник ABC точките O, H, I и O_9 съвпадат и условието на задачата е изпълнено. Ще разгледаме общия случай на разностранен остроъгълен триъгълник ABC, вписан в окръжност k с център O и радиус R. Означаваме с α, γ и β мерките на ъглите съответно при върховете A, C и B. Те образуват в този ред аритметична прогресия тогава и само тогава, когато $\alpha + \beta = 2\gamma$ или $\alpha + \beta + \gamma = 3\gamma$. Оттук следва $\gamma = 60^\circ$. Затова твърдение T_1 е равносилно с твърдение T_4: Изпълнено е равенството $ACB = 60^\circ$.

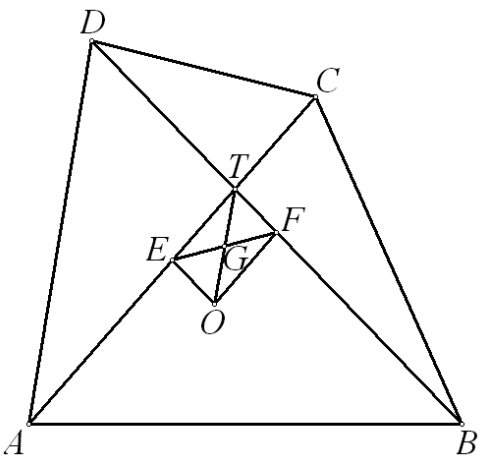


Тъй като ΔABC е остроъгълен, точките O и H са вътрешни за него, като $ON \perp AC$, $AON = \beta$. Ако правите AH и CH пресичат BC и AB съответно в точките D и F, то $AD \perp BC$ и $CF \perp AB$. От правоъгълните триъгълници CON и CBF намираме $OCN = 90^\circ - \beta = BCF = HCD$. Ако CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на ACB, то $OCL = ACL - OCN = BCL - HCD = HCL$, което показва, че CL е ъглополовяща на OCN. В правоъгълния триъгълник ACD имаме $CAD = 90^\circ - ACB$ откъдето равенството $ACB = 60^\circ$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $CAD = 30^\circ$, т.е. $CD = \frac{1}{2}AC = CN$. Последното е равносилно с еднаквост на правоъгълните триъгълници CHD и CON. Следователно твърдение T_4 е равносилно с твърдение T_5: Изпълнено е равенството $CH = CO$ и CL е ъглополовяща на OH. Тъй като $I \in CL$, твърдения T_5 и T_2 са равносилни. Както е известно, центърът O_9 на Ойлеровата окръжност за ABC е средата на отсечката OH (вж. Права на Ойлер и окръжност на деветте точки за триъгълник, МИ, 2008, 1). Затова твърдение T_5 е

равносилно с $CO_9O = 90^o$ и CO се вижда от точките M, N и O_9 под ъгъл 90°. Това показва, че точките C, O, M, N и O_9 лежат на окръжност с диаметър $CO = R$. При това центърът Q на тази окръжност лежи върху Ойлеровата окръжност на ΔABC.

Задача 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $T = AC \cap BD$ е пресечната точка на диагоналите и $S_{ADT} = \frac{1}{2}(S_{ABT} + S_{CDT})$. Ако G е медицентърът на $ABCD$, да се докаже, че: а) $GT \parallel AD$; б) $GT < \frac{AD}{4}$.

Хаим Хаимов, Варна



Решение: а) Без ограничение можем да считаме, че $S_{ABT} \geq S_{CDT}$. От условието на задачата следва, че $S_{ABT} \geq S_{ADT} \geq S_{CDT}$, откъдето $BT \geq DT$ и $AT \geq CT$. Следователно средите E и F съответно на AC и BD лежат съответно на отсечките AT и BT. Означаваме мярката на $\sphericalangle ATD$ с ϕ. Изпълнени са равенствата $S_{ADT} = \frac{1}{2} AT.DT.\sin\varphi$, $S_{ABT} = \frac{1}{2} AT.BT.\sin\varphi$ и $S_{CDT} = \frac{1}{2} CT.DT.\sin\varphi$. Сега от условието получаваме $2.AT.DT = AT.BT + CT.DT$, което води до равенството (*) $\rightarrow \frac{BT - DT}{DT} = \frac{AT - CT}{AT}$. Медицентърът на $ABCD$ е средата на EF. Нека O е симетричната точка на T спрямо G. Четириъгълникът $EOFT$ е успоредник, откъдето следват равенствата $EO = FT = BT - BF = BT - \frac{BT + DT}{2} = \frac{BT - DT}{2}$. Аналогично се показва, че $ET = \frac{AT - CT}{2}$. Сега от равенството (*) получаваме $\frac{EO}{DT} = \frac{ET}{AT}$. От $EO \| BD$ следва $\sphericalangle OET = \sphericalangle ATD$. Следователно $\Delta EOT \sim \Delta TDA$. Оттук заключаваме, че $\sphericalangle OTE = \sphericalangle TAD$, т.е. $GT \| AD$.

б) От $\Delta EOT \sim \Delta TDA$ следва още, че $\frac{TO}{AD} = \frac{EO}{DT}$. Оттук $TO = AD.\frac{EO}{DT} = AD.\frac{BT - DT}{2DT}$. Следователно $GT = \frac{TO}{2} = \frac{AD}{4}.\left(\frac{BT}{DT} - 1\right)$. За да докажем, че $GT < \frac{AD}{4}$, остава да проверим неравенството $\frac{BT}{DT} - 1 < 1$, което е еквивалентно с $BT < 2DT$, т.е. $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. Тъй като по условие $2S_{ADT} = S_{ABT} + S_{CDT}$, то $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. С това задачата е решена.