РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2012

Задача 1. В множеството на реалните числа е дефинирана бинарна операция $\otimes : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, където $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, която условно ще наричаме умножение и такава, че за всеки три реални числа a, b и c, където $b \neq 0$, е в сила равенството $a \otimes (b \otimes c) = \frac{a.c}{b}$. Ако е известно, че $2012 \otimes 2012 = 1$, да се пресметне $(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012)$.

Живко Желев, Стара Загора

Решение: Първи начин (**авторско решение**).

Нека $1 \otimes 1 = t \in \mathbb{R}$. Тогава $a \otimes t = a \otimes (1 \otimes 1) = \frac{a.1}{1} = a$. Оттук получаваме $1 = 2012 \otimes 2012 = 2012 \otimes (2012 \otimes t) = \frac{2012.t}{2012} = t$. Следователно $t = 1 \otimes 1 = 1$. Тогава

$$(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012) = (2011 \otimes (2012 \otimes 1)) \otimes (2011 \otimes (2012 \otimes 1)) =$$

$$= \frac{2011.1}{2012} \otimes \frac{2011.1}{2012} = \frac{2011}{2012} \otimes \frac{2011}{2012} = \frac{2011}{2012} \otimes \left(\frac{2011}{2012} \otimes 1 \right) = \frac{2011}{2012} . \frac{2012}{2011} = 1 .$$

Втори начин (**автор доц. др Юлия Нинова**).

$$(2011 \otimes 2012) \otimes (2011 \otimes 2012) = \frac{(2011 \otimes 2012).2012}{2011} =$$

$$= \frac{2012}{2011} . (2011 \otimes 2012) = 2012 \otimes (2011 \otimes (2011 \otimes 2012)) =$$

$$= 2012 \otimes \frac{2011.2012}{2011} = 2012 \otimes 2012 = 1 .$$

Както обръща внимание доц. д-р Юлия Нинова, близки по съдържание на тази задача са и следни две задачи.

Задача 1.1. В множеството на положителните рационални числа е дефинирана операция $*$ така, че за всеки четири елемента x, y, z и t са изпълнени:

1) $(x * y)(z * t) = (xz) * (yt)$; 2) $x * x = 1$; 3) $x * 1 = x$.

Намерете $27*43$.

Решение. $27*43=\left(43.\frac{27}{43}\right)*(43.1)=(43*43).\left(\frac{27}{43}*1\right)=1.\frac{27}{43}=\frac{27}{43}$.

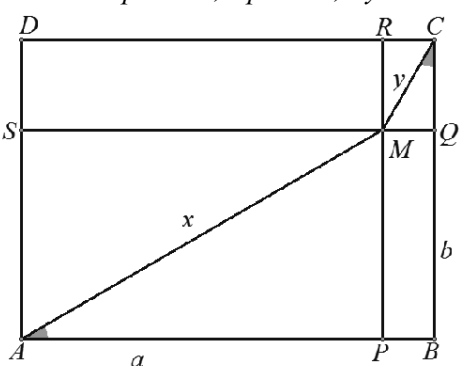
Задача 1.2. В множеството $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ е дадена бинарна операция $*$ с условията: 1) $(xy)*z=x(y*z)$; 2) $x*x=1$, за всяко $x, y, z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Пресметнете $12*18$.

Решение. $12*18=\left(\frac{12}{18}.18\right)*18=\frac{12}{18}.(18*18)=\frac{12}{18}.1=\frac{12}{18}$.

Задача 2. Нека $ABCD$ е правоъгълник, за който $AB\geq BC$, а M е такава вътрешна точка за $ABCD$, че $\sphericalangle MAB=\sphericalangle MCB=30°$. Да се докаже, че $ABCD$ е квадрат тогава и само тогава, когато $MA.MC=2\left(2-\sqrt{3}\right).AB.BC$.

Каталин Кристеа, Крайова, Румъния



Решение: Нека $AB=a$, $BC=b$, $MA=x$ и $MB=y$. Означаваме ортогоналните проекции на M върху AB, BC, CA и DA съответно с P, Q, R и S. От условието следват равенствата $MP=\frac{x}{2}$, $MR=\frac{y\sqrt{3}}{2}$, $MS=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ и $MQ=\frac{y}{2}$. Като вземем предвид, че $MP+MR=b$ и $MS+MQ=a$, получаваме системата уравнения

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{3}}{2}=b,\\ \frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{y}{2}=a.\end{cases}$$

Решенията на тази система се изразяват с равенствата $x=a\sqrt{3}-b$ и $y=b\sqrt{3}-a$. Нека сега $ABCD$ е квадрат, т.е. $a=b$. Тогава $MA.MC=\left(a\sqrt{3}-a\right)^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2.a^2=2\left(2-\sqrt{3}\right)AB.BC$. Обратно, да предположим, че е изпълнено равенството $MA.MC=2\left(2-\sqrt{3}\right).AB.BC$. Тогава $MA.MC=\left(a\sqrt{3}-b\right)\left(b\sqrt{3}-a\right)=4ab-\left(a^2+b^2\right)\sqrt{3}\leq 4ab-2ab\sqrt{3}=2\left(2-\sqrt{3}\right)ab$. Тъй като равенство се достига, когато $a=b$, то $ABCD$ е квадрат.

Задача 3. Нека α_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) са вътрешните ъгли на изпъкнал седмоъгълник. Каква зависимост съществува между коефициентите на уравнението $ax^7+bx^6+cx^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h=0$, $abcdefgh\neq 0$, ако корените му са равни на $ctg\frac{\alpha_i}{20}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) ? Как би изглеждала такава зависимост, ако корените на уравнението са $tg\frac{\alpha_i}{20}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)?

Милен Найденов, Варна

Решение: Означаваме $\beta_i=\frac{\alpha_i}{20}$ и $A_i=ctg\beta_i$ $(i=1,2,3,4,5,6,7)$. За произволни β_i $(i=1,2,3,4)$ (не непременно свързани с условието на задачата) са изпълнени следните равенства:

$$ctg(\beta_1+\beta_2)=\frac{ctg\beta_1 ctg\beta_2-1}{ctg\beta_1+ctg\beta_2}=\frac{A_1A_2-1}{A_1+A_2},\ ctg(\beta_1+\beta_2+\beta_3)=\frac{A_1A_2A_3-A_1-A_2-A_3}{A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1-1},$$

$$ctg(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)=\frac{A_1A_2A_3A_4-A_1A_2-A_1A_3-A_1A_4-A_2A_3-A_2A_4-A_3A_4+1}{A_1A_2A_3+A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_3A_4A_1-A_1-A_2-A_3-A_4}.$$

Тъй като $\sum_{i=1}^{7}\beta_i=45°$, от първото равенство получаваме:

$$ctg(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4).ctg(\beta_5+\beta_6+\beta_7)-1=ctg(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4)+ctg(\beta_5+\beta_6+\beta_7),$$

което според второто и третото равенства води до

$$(A_1A_2A_3A_4-A_1A_2-A_1A_3-A_1A_4-A_2A_3-A_2A_4-A_3A_4+1).(A_5A_6A_7-A_5-A_6-A_7)-$$
$$-(A_1A_2A_3+A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_3A_4A_1-A_1-A_2-A_3-A_4).(A_5A_6+A_6A_7+A_7A_5-1)=$$
$$=(A_1A_2A_3A_4-A_1A_2-A_1A_3-A_1A_4-A_2A_3-A_2A_4-A_3A_4+1).(A_5A_6+A_6A_7+A_7A_5-1)+$$
$$+(A_5A_6A_7-A_5-A_6-A_7).(A_1A_2A_3+A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_3A_4A_1-A_1-A_2-A_3-A_4).$$

Означаваме с σ_i елементарните симетрични полиноми от степен i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) на величините A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и A_7. След разкриване на скобите отляво и отдясно на последното равенство получаваме съответно $\sigma_7-\sigma_5+\sigma_3-\sigma_1$ и $\sigma_2-\sigma_4+\sigma_6-1$ т.е. изпълнено е равенството $\sigma_7-\sigma_5+\sigma_3-\sigma_1=\sigma_2-\sigma_4+\sigma_6-1$.

От формулите на Виет за разглежданото уравнение следва, че $\sigma_1=-\frac{b}{a}$, $\sigma_2=\frac{c}{a}$, $\sigma_3=-\frac{d}{a}$, $\sigma_4=\frac{e}{a}$, $\sigma_5=-\frac{f}{a}$, $\sigma_6=\frac{g}{a}$ и $\sigma_7=-\frac{h}{a}$. След заместване в горното равенство окончателно получаваме търсената зависимост $a+b+e+f=c+d+g+h$. Същата зависимост между коефициентите на уравнението се получава, ако то има за корени числата $tg\frac{\alpha_i}{20}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).