РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2011

Задача 1. Да се определят стойностите на параметъра *a*, за които уравнението $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\left|tg\pi x+cotg\pi x\right|}=a\left|\sin\left(2011\pi x\right)+\cos\left(2011\pi x\right)\right|$ има решение и да се реши уравнението за най-малката от намерените стойности на параметъра.

Христо Лесов, Казанлък

Решение (Христо Лесов): Изпълнени са следните релации: $\left|\sin\alpha+\cos\alpha\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right|\le\sqrt{2}$ за всяко α и $\left|tg\beta+cotg\beta\right|=\frac{2}{\left|\sin 2\beta\right|}\ge 2$ за всяко $\beta\ne m.\frac{\pi}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$. Следователно лявата страна на даденото уравнение е не по-малка от $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}2}=\sqrt{2}$, дясната му страна е не по-голяма от $a\sqrt{2}$ понеже от условието следва $a>0$. Така получаваме $\sqrt{2}\le\sqrt{2}a$, т.е. при $a\ge 1$ уравнението има решение. за най-малката от тях получаваме, че $\left|tg\pi x+cotg\pi x\right|=2$ и $\left|\sin\left(2011\pi x\right)+\cos\left(2011\pi x\right)\right|=\sqrt{2}$ са изпълнени едновременно. Първото от тези равенства е равносилно с $\left|\sin 2\pi x\right|=1$, откъдето $2\pi x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ или $x=k\pm\frac{1}{4}$ за всяко цяло число k. При това $2\pi x=\left(2k\pm\frac{1}{2}\right)\pi\ne m.\pi$. За $k=2n$ ($n\in\mathbb{Z}$) дясната страна приема вида

$$\left|\sin\left(2011.2n\pi\pm\frac{2011}{4}\pi\right)+\cos\left(2011.2n\pi\pm\frac{2011}{4}\pi\right)\right|=\left|\sin\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\pm\frac{3\pi}{4}\right)\right|$$

и затова е равна на $\sqrt{2}$ или 0 в зависимост от занака “+” или “-“. Решение е $x=2n+\frac{1}{4}$. За $k=2n+1$ ($n\in\mathbb{Z}$) дясната страна приема вида

$$\left|\sin\left(2011.2n\pi+2011\pi\pm\frac{2011}{4}\pi\right)+\cos\left(2011.2n\pi+2011\pi\pm\frac{2011}{4}\pi\right)\right|=\left|\sin\left(\pi\pm\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi\pm\frac{3\pi}{4}\right)\right|$$

и затова е равна на $\sqrt{2}$ или 0. Решение е $x=2n+1+\frac{1}{4}$. Общо решенията са Решение е $x=k+\frac{1}{4}$ за всяко цяло число k.

Задача 2. Реалните числа a, b и c са такива, че $a>1$, $b+c<a+1$ и $b<c$. Да се докаже, че $a>b$.

Любомир Любенов, Стара Загора

Решение (Любомир Любенов): Дадените неравенства записваме във вид на равенства така: $a-x=1$, $a+1-y=b+c$, $c-z=b$, където $x>0$, $y>0$ и $z>0$. Умножаваме получените равенства съответно с α, β и γ. Събираме ги и получаваме последователно $\alpha(a-x)+\beta(a+1-y)+\gamma(c-z)=\alpha.1+\beta.(b+c)+\gamma.b$,

$$(\alpha+\beta).a+(-\beta-\gamma).b+(-\beta+\gamma).c=\alpha.(1+x)+\beta.(y-1)+\gamma.z$$

Тъй като сравняваме a и b, ще ни е необходимо изразяване на $a-b$. В последното равенство избираме α, β и γ така, че $\alpha+\beta=1$, $-\beta-\gamma=-1$ и $-\beta+\gamma=0$. Получаваме $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$. Оттук същото равенство добива вида $a-b=(x+y+z)/2$, откъдето следва, че $a>b$.

Задача 3. Дадени са равностранен триъгълник ABC и точки A_1, B_1 и C_1 съответно върху правите *BC*, *CA* и *AB*. Нека H_a, H_b и H_c са ортоцентровете, а F_a, F_b и F_c – центровете на Фойербаховите окръжности съответно на ΔB_1C_1A, ΔC_1A_1B и ΔA_1B_1C. Нека $H_bF_b \cap H_cF_c = T_a$, $H_cF_c \cap H_aF_a = T_b$ и $H_aF_a \cap H_bF_b = T_c$. Да се докаже, че:

1) точките H_a, H_b и H_c лежат на една права тогава и само тогава, когато точките A_1, B_1 и C_1 лежат на една права;

2) лицето на $\Delta H_aH_bH_c$ е равно на лицето на $\Delta A_1B_1C_1$;

3) центърът на тежестта на точките H_a, H_b и H_c съвпада с центъра на ΔABC;

4) правите AF_a, BF_b, и CF_f се пресичат в една точка;

5) $\Delta T_aT_bT_c \cong \Delta ABC$;

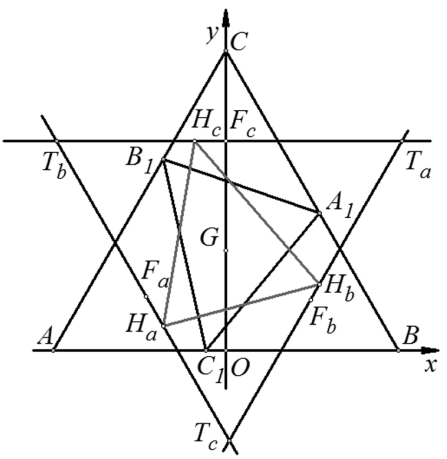
6) медицентърът на $\Delta T_aT_bT_c$ съвпада с центъра на тежестта на точките A_1, B_1 и C_1;

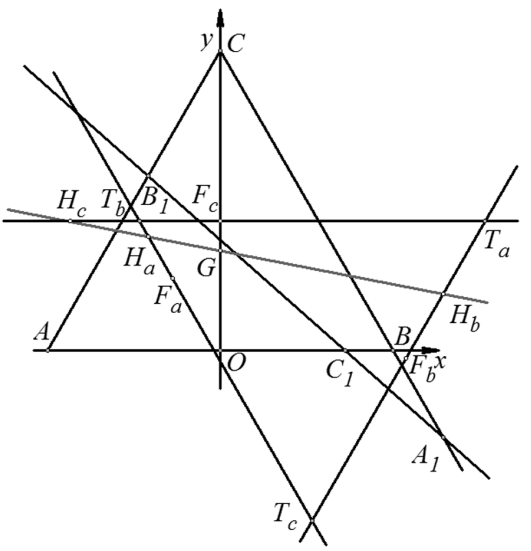
7) правите AT_a, BT_b и CT_c се пресичат в една точка.

Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение (Веселин Ненков): Избираме Декартова координатна система Oxy, както е показано на чертежите, спрямо която координатите на върховете на ΔABC са: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$. Ако първите координати на A_1, B_1 и C_1 спрямо Oxy са съответно λ, μ и ν, то като вземем предвид, че A_1, B_1 и C_1 са точки съответно от правите *BC*, *CA* и *AB* получаваме:

$$(1)\quad A_1\left(\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda)\right),\ B_1\left(\mu,\sqrt{3}(1+\mu)\right),\ C_1(\nu,0).$$





От (1) и координатите на A, B и C се получават координатите на медицентровете G_a, G_b и G_c съответно на ΔB_1C_1A, ΔC_1A_1B и ΔA_1B_1C:

$$(2)\quad G_a\left(\frac{\mu+\nu-1}{3},\frac{1+\mu}{3}\right),\ G_b\left(\frac{\nu+\lambda-1}{3},\frac{1-\lambda}{3}\right),\ G_c\left(\frac{\lambda+\mu}{3},\frac{\mu-\lambda+3}{3}\right).$$

Като намерим уравненията на две от височините за всеки от триъгълниците B_1C_1A, C_1A_1B и A_1B_1C и решим съответните системи уравнения, получаваме:

$$(3)\quad H_a\left(\mu,\frac{\nu-\mu}{\sqrt{3}}\right),\ H_b\left(\lambda,\frac{\lambda-\nu}{\sqrt{3}}\right),\ H_c\left(-(\lambda+\mu),\frac{\mu-\lambda+3}{\sqrt{3}}\right).$$

От (1) и (3) за ориентираните лица $\widetilde{S}_{A_1B_1C_1}$ и $\widetilde{S}_{H_aH_bH_c}$ съответно на $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta H_aH_bH_c$ определяме $\widetilde{S}_{A_1B_1C_1} = \widetilde{S}_{H_aH_bH_c} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu + 2\lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda)$. От тези равенства непосредствено следват 1) и 2). Нещо повече, когато $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta H_aH_bH_c$ съществуват, те са еднакво ориентирани.

От (3) се вижда, че центърът на тежеста на H_a, H_b и H_c е точката $G\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, която е медицентърът на ΔABC. С това е доказано 3).

Като се вземе предвид, че $\overrightarrow{OF_a} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OH_a} + 3\overrightarrow{OG_a}\right)$, от (2) и (3) следва, че $F_a\left(\frac{2\mu + \nu - 1}{4}, \frac{2\mu + \nu + 3}{4\sqrt{3}}\right)$. Аналогично се получава $F_b\left(\frac{2\lambda + \nu - 1}{4}, \frac{-2\lambda - \nu + 3}{4\sqrt{3}}\right)$ и $F_c\left(0, \frac{\mu - \lambda + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. Оттук лесно се вижда, че правите AF_a, BF_b и CF_c, минават през $G\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, което доказва 4). Нещо повече, точките F_a, F_b и F_c лежат върху височините на ABC.

От (2) и (3) се вижда, че векторите $\overrightarrow{H_aG_a}$, $\overrightarrow{H_bG_b}$ и $\overrightarrow{H_cG_c}$ са колинеарни съответно с $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$. Следователно $\Delta T_aT_bT_c \sim \Delta ABC$. От (2) и (3) се получава още, че уравненията на правите H_aG_a, H_bG_b и H_cG_c са:

$$H_aG_a : \sqrt{3}x + y - \frac{2\mu + \nu}{\sqrt{3}} = 0,\ H_bG_b : \sqrt{3}x - y - \frac{2\lambda + \nu}{\sqrt{3}} = 0,\ H_cG_c : y - \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}} = 0.$$

От тези уравнения се получава:

$$(4) \qquad T_a\left(\frac{\lambda + \mu + \nu + 3}{3}, \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}}\right),\ T_b\left(\frac{\lambda + \mu + \nu - 3}{3}, \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}}\right),$$
$$T_c\left(\frac{\lambda + \mu + \nu}{3}, \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{3}}\right).$$

От (4) получаваме, че ориентираното лице $\widetilde{S}_{T_aT_bT_c}$ на $\Delta T_aT_bT_c$ е $\widetilde{S}_{T_aT_bT_c} = \sqrt{3}$. Точно толкова е лицето на ΔABC. Следователно триъгълниците ABC и $T_aT_bT_c$ са еднакво ориентирани и еднакви равностранни триъгълници. С това е доказано 5). Всъщност доказахме още, че Ойлеровите прави на триъгълниците B_1C_1A, C_1A_1B и A_1B_1C са успоредни съответно на BC, CA и AB.

Твърдение 6) следва непосредствено от (1) и (4).

Твърдение 7) следва от посоченото свойство на Ойлеровите прави на триъгълниците B_1C_1A, C_1A_1B и A_1B_1C и от теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници.

Твърдение 7) се получава и по следния начин: Разглеждаме точката $M\left(\dfrac{\lambda+\mu+\nu}{6}, \dfrac{\mu-\lambda+3}{2\sqrt{3}}\right)$. Лесно се проверява, че $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MT_a}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MT_b}$ и $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MT_c}$. От тези векторни равенства следва, че правите AT_a, BT_b и CT_c, минават през точката M. Нещо повече, точката M е център на симетрия за триъгълниците ABC и $T_aT_bT_c$.

С това задачата е напълно решена.