

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2011

Задача 1. Да се определят стойностите на параметъра a , за които уравнението $\sqrt{\log_{\sqrt{2}} |tg \pi x + cotg \pi x|} = a |\sin(2011\pi x) + \cos(2011\pi x)|$ има решение и да се реши уравнението за най-малката от намерените стойности на параметъра.

Христо Лесов, Казанлък

Решение (Христо Лесов): Изпълнени са следните релации: $|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$ за всяко α и $|tg \beta + cotg \beta| = \frac{2}{|\sin 2\beta|} \geq 2$ за всяко $\beta \neq m \cdot \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. Следователно лявата страна на даденото уравнение е не по-малка от $\sqrt{\log_{\sqrt{2}} 2} = \sqrt{2}$, дясната му страна е не по-голяма от $a\sqrt{2}$ понеже от условието следва $a > 0$. Така получаваме $\sqrt{2} \leq \sqrt{2}a$, т.е. при $a \geq 1$ уравнението има решение. за най-малката от тях получаваме, че $|tg \pi x + cotg \pi x| = 2$ и $|\sin(2011\pi x) + \cos(2011\pi x)| = \sqrt{2}$ са изпълнени едновременно. Първото от тези равенства е равносилно с $|\sin 2\pi x| = 1$, откъдето $2\pi x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $x = k \pm \frac{1}{4}$ за всяко цяло число k . При това $2\pi x = \left(2k \pm \frac{1}{2} \right) \pi \neq m\pi$. За $k = 2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) дясната страна приема вида $\left| \sin \left(2011 \cdot 2n\pi \pm \frac{2011}{4} \pi \right) + \cos \left(2011 \cdot 2n\pi \pm \frac{2011}{4} \pi \right) \right| = \left| \sin \left(\pm \frac{3\pi}{4} \right) + \cos \left(\pm \frac{3\pi}{4} \right) \right|$ и затова е равна на $\sqrt{2}$ или 0 в зависимост от знака “+” или “-“. Решение е $x = 2n + \frac{1}{4}$. За $k = 2n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) дясната страна приема вида $\left| \sin \left(2011 \cdot 2n\pi + 2011\pi \pm \frac{2011}{4} \pi \right) + \cos \left(2011 \cdot 2n\pi + 2011\pi \pm \frac{2011}{4} \pi \right) \right| = \left| \sin \left(\pi \pm \frac{3\pi}{4} \right) + \cos \left(\pi \pm \frac{3\pi}{4} \right) \right|$ и затова е равна на $\sqrt{2}$ или 0. Решение е $x = 2n+1 + \frac{1}{4}$. Общо решенията са Решение е $x = k + \frac{1}{4}$ за всяко цяло число k .

Задача 2. Реалните числа a , b и c са такива, че $a > 1$, $b + c < a + 1$ и $b < c$. Да се докаже, че $a > b$.

Любомир Любенов, Стара Загора

Решение (Любомир Любенов): Дадените неравенства записваме във вид на равенства така: $a - x = 1$, $a + 1 - y = b + c$, $c - z = b$, където $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$. Умножаваме получените равенства съответно с α , β и γ . Събираме ги и получаваме последователно $\alpha(a - x) + \beta(a + 1 - y) + \gamma(c - z) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (b + c) + \gamma b$,

$$(\alpha + \beta) \cdot a + (-\beta - \gamma) \cdot b + (-\beta + \gamma) \cdot c = \alpha \cdot (1 + x) + \beta \cdot (y - 1) + \gamma \cdot z$$

Тъй като сравняваме a и b , ще ни е необходимо изразяване на $a - b$. В последното равенство избираме α , β и γ така, че $\alpha + \beta = 1$, $-\beta - \gamma = -1$ и $-\beta + \gamma = 0$. Получаваме $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Оттук същото равенство добива вида $a - b = (x + y + z) / 2$, откъдето следва, че $a > b$.

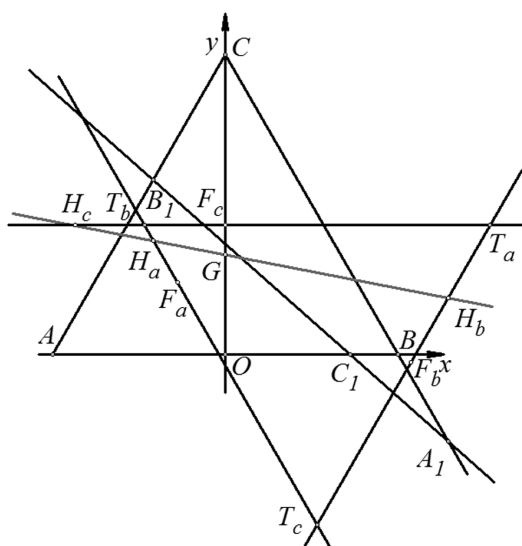
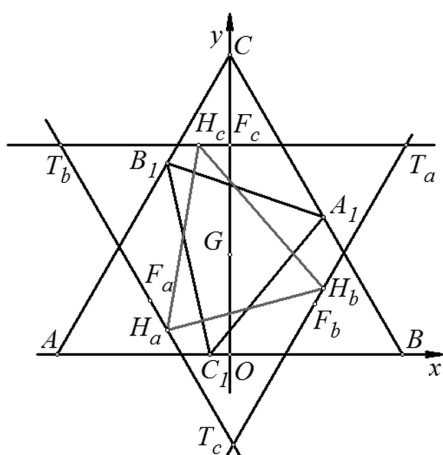
Задача 3. Дадени са равностраничен триъгълник ABC и точки A_1 , B_1 и C_1 съответно върху правите BC , CA и AB . Нека H_a , H_b и H_c са ортоцентровете, а F_a , F_b и F_c – центровете на Фойербаховите окръжности съответно на ΔB_1C_1A , ΔC_1A_1B и ΔA_1B_1C . Нека $H_bF_b \cap H_cF_c = T_a$, $H_cF_c \cap H_aF_a = T_b$ и $H_aF_a \cap H_bF_b = T_c$. Да се докаже, че:

- 1) точките H_a , H_b и H_c лежат на една права тогава и само тогава, когато точките A_1 , B_1 и C_1 лежат на една права;
- 2) лицето на $\Delta H_aH_bH_c$ е равно на лицето на $\Delta A_1B_1C_1$;
- 3) центърът на тежестта на точките H_a , H_b и H_c съвпада с центъра на ΔABC ;
- 4) правите AF_a , BF_b , и CF_c се пресичат в една точка;
- 5) $\Delta T_aT_bT_c \cong \Delta ABC$;
- 6) медицентърът на $\Delta T_aT_bT_c$ съвпада с центъра на тежестта на точките A_1 , B_1 и C_1 ;
- 7) правите AT_a , BT_b и CT_c се пресичат в една точка.

Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение (Веселин Ненков): Избираме Декартова координатна система Oxy , както е показано на чертежите, спрямо която координатите на върховете на $\triangle ABC$ са: $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,\sqrt{3})$. Ако първите координати на A_1 , B_1 и C_1 спрямо Oxy са съответно λ , μ и ν , то като вземем предвид, че A_1 , B_1 и C_1 са точки съответно от правите BC , CA и AB получаваме:

$$(1) \quad A_1(\lambda, \sqrt{3}(1-\lambda)), \quad B_1(\mu, \sqrt{3}(1+\mu)), \quad C_1(\nu, 0).$$



От (1) и координатите на A , B и C се получават координатите на медицентровете G_a , G_b и G_c съответно на $\triangle B_1C_1A$, $\triangle C_1A_1B$ и $\triangle A_1B_1C$:

$$(2) \quad G_a\left(\frac{\mu+\nu-1}{3}, \frac{1+\mu}{3}\right), \quad G_b\left(\frac{\nu+\lambda-1}{3}, \frac{1-\lambda}{3}\right), \quad G_c\left(\frac{\lambda+\mu}{3}, \frac{\mu-\lambda+3}{3}\right).$$

Като намерим уравненията на две от височините за всеки от триъгълниците B_1C_1A , C_1A_1B и A_1B_1C и решим съответните системи уравнения, получаваме:

$$(3) \quad H_a\left(\mu, \frac{\nu-\mu}{\sqrt{3}}\right), \quad H_b\left(\lambda, \frac{\lambda-\nu}{\sqrt{3}}\right), \quad H_c\left(-(\lambda+\mu), \frac{\mu-\lambda+3}{\sqrt{3}}\right).$$

От (1) и (3) за ориентираните лица $\tilde{S}_{A_1B_1C_1}$ и $\tilde{S}_{H_aH_bH_c}$ съответно на $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta H_aH_bH_c$ определяме $\tilde{S}_{A_1B_1C_1} = \tilde{S}_{H_aH_bH_c} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda - \mu + 2\lambda\mu - \mu\nu - \nu\lambda)$. От тези равенства непосредствено следват 1) и 2). Нещо повече, когато $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta H_aH_bH_c$ съществуват, те са еднакво ориентирани.

От (3) се вижда, че центърът на тежестта на H_a , H_b и H_c е точката $G\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, която е медицентърът на ΔABC . С това е доказано 3).

Като се вземе предвид, че $\overrightarrow{OF_a} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OH_a} + 3\overrightarrow{OG_a})$, от (2) и (3) следва, че $F_a\left(\frac{2\mu + \nu - 1}{4}, \frac{2\mu + \nu + 3}{4\sqrt{3}}\right)$. Аналогично се получава $F_b\left(\frac{2\lambda + \nu - 1}{4}, \frac{-2\lambda - \nu + 3}{4\sqrt{3}}\right)$ и $F_c\left(0, \frac{\mu - \lambda + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. Оттук лесно се вижда, че правите AF_a , BF_b и CF_c , минават през $G\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, което доказва 4). Нещо повече, точките F_a , F_b и F_c лежат върху височините на ABC .

От (2) и (3) се вижда, че векторите $\overrightarrow{H_aG_a}$, $\overrightarrow{H_bG_b}$ и $\overrightarrow{H_cG_c}$ са колинеарни съответно с $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$. Следователно $\Delta T_aT_bT_c \sim \Delta ABC$. От (2) и (3) се получава още, че уравненията на правите H_aG_a , H_bG_b и H_cG_c са:

$$H_aG_a : \sqrt{3}x + y - \frac{2\mu + \nu}{\sqrt{3}} = 0, H_bG_b : \sqrt{3}x - y - \frac{2\lambda + \nu}{\sqrt{3}} = 0, H_cG_c : y - \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}} = 0.$$

От тези уравнения се получава:

$$(4) \quad T_a\left(\frac{\lambda + \mu + \nu + 3}{3}, \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}}\right), T_b\left(\frac{\lambda + \mu + \nu - 3}{3}, \frac{\mu - \lambda + 3}{\sqrt{3}}\right), \\ T_c\left(\frac{\lambda + \mu + \nu}{3}, \frac{\mu - \lambda}{\sqrt{3}}\right).$$

От (4) получаваме, че ориентираното лице $\tilde{S}_{T_a T_b T_c}$ на $\Delta T_a T_b T_c$ е $\tilde{S}_{T_a T_b T_c} = \sqrt{3}$.

Точно толкова е лицето на ΔABC . Следователно триъгълниците ABC и $T_a T_b T_c$ са еднакво ориентирани и еднакви равностранны триъгълници. С това е доказано

5). Всъщност доказахме още, че Ойлеровите прави на триъгълниците $B_1 C_1 A$, $C_1 A_1 B$ и $A_1 B_1 C$ са успоредни съответно на BC , CA и AB .

Твърдение 6) следва непосредствено от (1) и (4).

Твърдение 7) следва от посоченото свойство на Ойлеровите прави на триъгълниците $B_1 C_1 A$, $C_1 A_1 B$ и $A_1 B_1 C$ и от теоремата на Дезарг за перспективните триъгълници.

Твърдение 7) се получава и по следния начин: Разглеждаме точката $M\left(\frac{\lambda + \mu + \nu}{6}, \frac{\mu - \lambda + 3}{2\sqrt{3}}\right)$. Лесно се проверява, че $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MT_a}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MT_b}$ и $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MT_c}$. От тези векторни равенства следва, че правите AT_a , BT_b и CT_c , минават през точката M . Нещо повече, точката M е център на симетрия за триъгълниците ABC и $T_a T_b T_c$.

С това задачата е напълно решена.