

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1/2016

Задача 1. Целочислените редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са дефинирани чрез равенствата $x_1 = a - 1$, $y_1 = a + 1$, $x_n = a \cdot x_{n-1} + a - 1$, $y_n = a \cdot y_{n-1} - a + 1$, при $n \geq 2$.

а) Да се докаже, че за всяко цяло число a точно едно от числата x_n , y_n и $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ се дели на 3.

б) Да се определят целите числа a , за които x_n и y_n са взаимно прости числа за всяко естествено число n .

Христо Лесов – Казанлък

Решение: дадените рекурентни равенства представяме по следния начин: $x_n + 1 = a(x_{n-1} + 1)$ и $y_n - 1 = a(y_{n-1} - 1)$. От тях получаваме последователно $x_{n-1} + 1 = a(x_{n-2} + 1)$ и $y_{n-1} - 1 = a(y_{n-2} - 1)$, ..., $x_2 + 1 = a(x_1 + 1)$ и $y_2 - 1 = a(y_1 - 1)$. След почленно умножаване на съответните равенства за отделните редици намираме равенствата: $x_n + 1 = a^{n-1}(x_1 + 1)$ и $y_n - 1 = a^{n-1}(y_1 - 1)$. Оттук следва, че $x_n = a^n - 1$ и $y_n = a^n + 1$. Нека a е цяло число. Тъй като x_n , $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ и y_n са три последователни числа, точно едно от тях се дели на 3. С това твърдение а) е доказано. По-нататък от получените за x_n и y_n равенства следва, че ако a е нечетно число, то x_n и y_n са четни за всяко естествено число n . Ако a е четно, то x_n и y_n са нечетни и е изпълнено равенството $x_n - y_n = 2$. Оттук следва, че най-големият общ делител на x_n и y_n е делител на 2. Тъй като тези числа са нечетни, то най-големият им общ делител е 1. Затова при всяко естествено число n и всяко четно число a числата x_n и y_n са взаимно прости. С това задачата е решена.

Задача 2. Един изпъкнал четириъгълник се нарича хармоничен, ако е вписан в окръжност и произведенията на срещуположните му страни са равни помежду си. Нека $ABCDEF$ е изпъкнал шестоъгълник, в който четириъгълниците $ABDF$ и $ACDE$ са хармонични. Да се докаже, че средите M , N ,

P съответно на диагоналите AD , BE , CF и пресечната точка Q на BE и CF лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов – Варна

Решение: в решението на задачата ще използваме следната

Лема. Ако $ABCD$ е хармоничен четириъгълник и U е средата на диагонала AC , то са изпълнени равенствата: 1) $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$; 2) $BU \cdot DU = \frac{1}{4} \cdot AC^2$.

Доказателство. От теоремата на Птолемей $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ за вписан четириъгълник и равенството $AB \cdot CD = BC \cdot DA$ от определения следва $2 \cdot AB \cdot CD = AC \cdot BD$, което е еквивалентно с $\frac{AB}{AU} = \frac{BD}{CD}$. Освен това $\sphericalangle BAU = \sphericalangle BDC$ (вписани ъгли). Следователно $\triangle ABU \sim \triangle DBC$. Оттук $\sphericalangle AUB = \sphericalangle DCB$ и $\frac{AU}{BU} = \frac{CD}{BC}$. Аналогично се получава, че $\triangle UAD \sim \triangle CBD$, откъдето $\sphericalangle AUD = \sphericalangle DCB$ и $\frac{AU}{DU} = \frac{BC}{CD}$. От равенствата между ъглите следва $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$, а от равенствата на отношенията се получава $BM \cdot DM = AM^2 = \frac{1}{4} \cdot AC^2$. С това лемата е доказана.

Преминаваме към решение на задачата. Прилагаме 1) от лемата към хармоничните четириъгълници $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно равенствата $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMF$ и $\sphericalangle CMD = \sphericalangle EMD$. След почленно събиране на тези равенства следва, че $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = \sphericalangle AMF + \sphericalangle EMD$.

Оттук $\sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$. Използвайки това равенство, получаваме $\sphericalangle BME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle FME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$, т.е. $\sphericalangle BME = \sphericalangle FME$. Сега прилагаме 2) от лемата към $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно $BM \cdot FM = \frac{1}{4} AD^2$ и $EM \cdot CM = \frac{1}{4} AD^2$. Следователно $\frac{BM}{CM} = \frac{EM}{FM}$. От това равенство и последното равенство между ъгли следва, че $\triangle BME \sim \triangle CMF$. Тъй като MN и MP са съответни медиани в двата подобни триъгълника, то $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPF$, т.е. $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPQ$. Оттук следва, че $\sphericalangle MNQ + \sphericalangle MPQ = 180^\circ$. Последното равенство означава, че точките M , N , P и Q лежат на една окръжност.

Задача 3. Да се намери множеството от точки M , двете допирателни през които към дадена елипса са перпендикулярни.

Милен Найденов – Варна

Решение: спрямо каноничната си координатна система Oxy елипсата има уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Нека точката $M(\xi, \eta)$ е от търсеното геометрично място и лежи върху допирателна l с уравнение $y = kx + n$. От двете уравнения следва квадратното уравнение $(a^2k^2 + b^2)x^2 + 2a^2knx + a^2(n^2 - b^2) = 0$. Правата l е допирателна тогава и само тогава, когато дискриминантата на последното уравнение е нула. Следователно е изпълнено равенството $n^2 = a^2k^2 + b^2$. Тъй като $M \in l$, то $\eta = k\xi + n$. Затова $\eta - k\xi = \pm\sqrt{a^2k^2 + b^2}$. След повдигане в квадрат на двете страни на последното равенство стигаме до квадратното спрямо k уравнение $(a^2 - \xi^2)k^2 + 2\xi\eta k + b^2 - \eta^2 = 0$.

Ако k_1 и k_2 са корените на това уравнение, от формулите на Виет следва, че $k_1k_2 = \frac{b^2 - \eta^2}{a^2 - \xi^2}$. Тъй като k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на двете допирателни през M и тези допирателни трябва да са перпендикулярни, то $k_1k_2 = -1$. Оттук следва, координатите на M удовлетворяват равенството $\xi^2 + \eta^2 = a^2 + b^2$. Последното е уравнение на окръжност с център O и радиус $\sqrt{a^2 + b^2}$. Следователно търсеното геометрично място е окръжността, описана около правоъгълника, определен от върховете допирателни на елипсата.

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
MATHEMATICS AND INFORMATICS
BULGARIAN EDUCATIONAL JOURNAL
ANNUAL CONTENTS
ГОДИШНО СЪДЪРЖАНИЕ

PAGES / СТРАНИЦИ

Number 1 / Книжка 1:	1 – 104
Number 2 / Книжка 2:	105 – 224
Number 3 / Книжка 3:	225 – 344
Number 4 / Книжка 4:	345 – 456
Number 5 / Книжка 5:	457 – 560
Number 6 / Книжка 6:	561 – 688

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

95 – 96	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of the Issue]
97 – 98	Решения на конкурсните задачи от брой 2, 2015 [Solutions of the Contest Problems from issue 2, 2015]
215 – 215	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of the Issue]
216 – 217	Решения на конкурсните задачи от брой 3, 2015 [Solutions of the Contest Problems from issue 3, 2015]
317 – 317	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of Issue]
318 – 322	Решения на конкурсните задачи от брой 4, 2015 [Solutions of the Contest Problems from issue 4, 2015]
446 – 446	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
447 – 450	Решения на конкурсните задачи от брой 5, 2015 [Solutions of the Contest Problems from Issue 5, 2015]
548 – 548	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
549 – 553	Решения на конкурсните задачи от брой 6, 2015 [Solutions of the Contest Problems from Issue 6, 2015]
673 – 674	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
675 – 677	Решения на конкурсните задачи от брой 1, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 1, 2016]

**EDUCATIONAL MATTERS /
ВЪПРОСИ НА ПРЕПОДАВАНЕТО**

- 11 – 28 Аритметичен или алгебричен метод при решаване на задачи в началната училищна математика [Arithmetical or Algebraic Method in Solving Primary School Mathematical Problems] / *Здравко Лалчев, Маргарита Върбанова, Ирина Вутова* / *Zdravko Lalchev, Margarita Varbanova, Irina Voutova*
- 29 – 42 Реализация дидактических возможностей информационных и коммуникационных технологий в развитии творческих способностей и формировании исследовательских навыков [Realization of the Didactic Possibilities of the Information and Communication Technologies in the Formation of Creative Skills and The Development of Investigating Habits] / *Александр Русаков* / *Alexander Rusakov*
- 111 – 120 Развитие математического образования в России XVIII века [Development of the Mathematical Education in Russia in the XVIII Century] / *Татьяна Буторина* / *Tatyana Butorina*

**EDUCATIONAL RESEARCH /
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ**

- 43 – 51 Stationary Numbers / *Smaiyl Makyshov*
- 52 – 72 Общ подход за установяване на зависимости между радиуси на допиращи се окръжности [A General Approach to Establish Relations Among The Radii of Tangent Circles] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков* / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 73 – 82 Извънкласните дейности по математика – различната форма за мотивиране на учениците [Extracurricular Activities in Mathematics – a Different Form for Student Motivation] / *Зара Данаилова-Стойнова, Ивайло Старибратов* / *Zara Danailova-Stoynova, Ivaylo Staribratov*
- 121 – 142 Програмни експерименти със задачи от тип Heron [Programming Experiments with Problems of Heron Type] / *Павел Азълов* / *Pavel Azalov*
- 143 – 169 Ойлер-Вен диаграми или MZ-карти в началната училищна математика [Euler-Venn Diagrams or MZ-Cards in Primary School Mathematics] / *Здравко Лалчев, Маргарита Върбанова, Ирина Вутова, Иван Душков* / *Zdravko Lalchev, Margarita Varbanova, Irina Voutova, Ivan Doushkov*
- 231 – 242 Характер современного образования в условиях построения информационного общества [Character of the Contemporary Education in Conditions of Information Society Construction] /

- Ярослав Ваграменко, Сава Гроздев, Александър Русаков / Jaroslav Vagramenko, Sava Grozdev, Alexander Rusakov*
- 243 – 254 Анализ на задачите и представяне на учениците от XI и XII клас на областния математически турнир 'Кърджали' 2015 [Analysis of the Problems and Performance of the Students from 11th and 12th Grades in the Regional Mathematics Tournament Kardzhali' 2015] / *Росен Николаев, Йордан Петков / Rosen Nikolaev, Jordan Petkov*
- 351 – 367 Обобщение на теоремата на Дроз-Фарни, определено от описано конично сечение [Generalization of Droz-Farny Theorem Defined by a Circum-conic] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 368 – 380 Активно, участващо наблюдение – тип интервю [In-depth Interview] / *Христо Христов, Христо Крушков / Hristo Hristov, Hristo Krushkov*
- 463 – 479 Базите данни като средство за по-качествено обучение по информационни технологии [Databases as Means for More Qualitative Training in Information Technologies] / *Веселин Дзивев / Vesselin Dzivev*
- 480 – 492 Excel в помощ при решаване на някои показателни уравнения [Using Excel for Solving Some Exponential Equations] / *Диана Стефанова, Пламен Пенев / Diana Stefanova, Plamen Penev*
- 493 – 496 An Improvement of the Gerretsen's Inequality for Non-obtuse Triangles / *Šefket Arslanagić*
- 567 – 571 Первый Международный Сетевой Исследовательский Проект Учащихся в Рамках Мите [First International Net Research Project of Secondary Students in the Frames of Mite] / *Мария Шабанова, Марина Белорукова, Роза Атамуратова, Веселин Ненков / Maria Shabanova, Marina Belorukova, Roza Atamuratova, Veselin Nenkov*
- 572 – 588 Некоторые траектории, которые определены равнобедренными Треугольниками [Some Trajectories Determined by Isosceles Triangles] / *Ксения Горская, Дарья Контева, Даниил Мукуров, Еркен Мудебаев, Казбек Мухамбетов, Адилбек Темирханов, Лили Стефанова, Ирина Христова, Радина Иванова / Gorskaya Kseniya, Kopteva Daria, Mikurov Danii, Yerkin Amirzhanovich Mudebaev, Kazbek Batyrbekovich Mukhambetov, Adilbek Timurovich Temirkhanov, Lilly Stefanova, Irina Hristova, Radina Ivanova*
- 589 – 598 Домашната работа – неделима част от учебния процес [The Homework – an Integral Part of the Educational Process] / *Елена Радованова / Elena Radovanova*

- 599 – 613 Някои групи логаритмични уравнения с помощта на Excel [Groups of Logarithmic Equations by the Help of Excel] / *Диана Стефанова, Пламен Пенев / Diana Stefanova, Plamen Penev*

**EDUCATIONAL TECHNOLOGIES /
ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ**

- 170 – 182 Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения [One More Idea to Solve Trigonometric Equations] / *Диана Стефанова, Пламен Пенев / Diana Stefanova, Plamen Penev*
- 255 – 266 Методи за активно обучение на кандидат-студенти по информатика [Methods for Active Learning of Prospective Students in Informatics] / *Христо Крушков / Hristo Krushkov*
- 269 – 281 Чевиана и симедиана в триъгълник. Теорема на Стюарт [Cevian and Symmedian in the Triangle Stewart's Theorem] / *Румяна Несторова / Romyana Nestorova*
- 282 – 293 Обобщение на теоремата на Чезар Кошница [A Generalization of a Cesar Koshnica Theorem] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 294 – 308 Компютърната лингвистика: атрактивно средство за активно обучение [Computational Linguistics: Attractive Means for Active Learning] / *Христо Крушков, Hristo Krushkov*
- 309 – 316 Една парадигма за образованието [Paradigm for the Education] / *Хари Алексиев / Hari Aleksiev*
- 381 – 390 Хипотезата в обучението по математика [The Hypothesis in teaching Mathematics] / *Румяна Маврова, Пенка Рангелова, Елена Тодорова / Romyana Mavrova, Penka Rangelova, Elena Todorova*
- 391 – 401 Comparative Analysis of the Students' Scores in Solving Constructive Tasks when Geometry is Studied in a Standard Way and with the Use of Complex Numbers / *Katerina Anevska, Risto Malceski, Metodi Glavche*
- 402 – 415 Практическа задача от тип PISA, изследвана с помощта на софтуер за общо приложение [A Practical Problem of PISA Type Studied by Software for General Application] / *Сава Гроздев, Десислава Георгиева / Sava Grozdev, Desislava Georgieva*
- 416 – 431 От структурно към обектоориентирано програмиране [From Structured to Object-oriented Programming] / *Христо Крушков / Hristo Krushkov*
- 432 – 445 Компютърните игри в обучението по математика – предизвикателства и възможности [Computer Games in Mathematics Education – Challenges and Opportunities] / *Мая Стоянова, Даниела Дурева-Тупарова, Костадин Самарджиев / Maya Stoyanova, Daniela Dureva-Tuparova, Kostadin Samardzhiev*

- 497 – 504 Three Inequalities for the Altitudes of a Triangle / *Šefket Arslanagić*
505 – 515 Computer Discovered Mathematics: Orthology Centers of the Euler Triangles / *Sava Grozdev, Deko Dekov*
516 – 525 Forecasting of Time-Series for Financial Markets / *Reinhard Magenreuter*
526 – 538 Neural Networks / *Reinhard Magenreuter*
539 – 547 Академичната лекция – традиционна форма на обучение във ВУЗ с възможности за иновационно развитие на познавателния потенциал [The Academic Lecture – a Traditional Form of Instruction in Higher Education with Possibilities for Innovative Development of Learning Potential] / *Елена Радованова / Elena Radovanova*
614 – 625 Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника [Pseudocenter and Orthocenter – Notable Points in the Quadrilateral] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов / Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*
626 – 656 Някои нови неравенства между средните аритметично, геометрично, хармонично и квадратично [Some New Inequalities Among the Arithmetic, Geometric, Harmonic and Quadratic Means] / *Тодор Мумев / Todor Mitev*
657 – 664 Fuzzy Logic / *Reinhard Magenreuter*
665 – 672 Genetic Algorithm / *Reinhard Magenreuter*

OLYMPIADS. COMPETITIONS / ОЛИМПИАДИ. СЪСТЕЗАНИЯ

- 83 – 88 Тринадесета международна олимпиада по лингвистика [Thirteenth International Linguistics Olympiad] / *Иван Держански / Ivan Derzhanski*
89 – 94 Международна Жаутиковска олимпиада [International Zhautikov Olympiad] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

RESEARCH, SURVEYS, RESULTS / ПРОУЧВАНИЯ, РЕЗУЛТАТИ

- 183 – 192 Обвързване на обучението по алгебра и геометрия [Connecting the Education in Algebra and Geometry] / *Румяна Маврова, Пенка Рангелова / Rumiyan Mavrova, Penka Rangelova*
193 – 203 Comparative Analysis Regarding the Use of Complex Numbers in Secondary School / *Katerina Anevsk, Sava Grozdev, Risto Malčeski*
204 – 214 Методическа и технологична реализация на дидактическо проектиране в обучението по математика [Methodical and Technological Realization of Didactical Design in Mathematics Teaching] / *Наталия Павлова / Nataliya Pavlova*