

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2019

Задача 1. Да се намерят всички цели числа x , за които $\sqrt{x(x-9)+2019}$ е естествено число.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: нека $\sqrt{x(x-9)+2019} = n$ е естествено число. Тогава $x^2 - 9x + 2019 - n^2 = 0$. Решенията на това квадратно относно x уравнение се определят чрез формулата $x_{1,2} = \frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{D})$, където $D = 4n^2 - 7995$. Оттук следва, че x е цяло число, когато $D = m^2$ за нечетно естествено число m . Така стигаме до равенството $4n^2 - 7995 = m^2$ или $4n^2 - m^2 = 7995$, което се представя във вида $(2n+m)(2n-m) = 1.3.13.41$. Тъй като $0 < 2n-m < 2n+m$, получаваме следните възможности: $2n-m = 1, 3, 5, 13, 15, 39, 41, 65$ и техните съответни $2n+m = 7995, 2665, 1599, 615, 533, 205, 195, 123$. След почленно събиране и изваждане на тези две равенства изразяваме последователно: $4n = 7996, 2668, 1604, 628, 548, 244, 236, 188$ и $4m = 7994, 2662, 1594, 602, 518, 166, 154, 58$. Оттук имаме $n = 1999, 667, 401, 157, 137, 61, 59, 47$ и $m = 3997, 1331, 797, 301, 259, 83, 77, 29$. Сега за стойностите на x получаваме: $x = \frac{1}{2}(9+m) = 2003, 670, 403, 155, 134, 46, 43, 19$ и $x = \frac{1}{2}(9-m) = -1994, -661, -394, -146, -125, -37, -34, -10$.

Задача 2. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са изпълнени равенствата $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ и $AD \neq AB$. Ако симетралата на диагонала BD пресича диагонала AC в точка O , да се докажат равенствата $\sphericalangle ADO = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BDC$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека O' е вътрешна за $ABCD$ точка, за която са изпълнени равенствата $\sphericalangle ADO' = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ABO' = \sphericalangle BDC$. Ще докажем, че $O' \equiv O$, с което твърдението на задачата ще бъде доказано. Въвеждаме означенията

$\sphericalangle CAD = \alpha_1$, $\sphericalangle CAB = \alpha_2$, $\sphericalangle O'AD = x$, $\sphericalangle O'AB = y$, $\sphericalangle DBC = \beta_2$, $\sphericalangle BDC = \delta_1$, $\sphericalangle O'DB = \omega_1$ и $\sphericalangle O'BD = \omega_2$. От тези означения и построението на точката O' следва, че $\sphericalangle ADO' = \sphericalangle DBC = \beta_2$ и $\sphericalangle ABO' = \sphericalangle BDC = \delta_1$.

Тъй като по условие $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$, то $\beta_2 + \omega_1 + \delta_1 = \delta_1 + \omega_2 + \beta_2$. Оттук

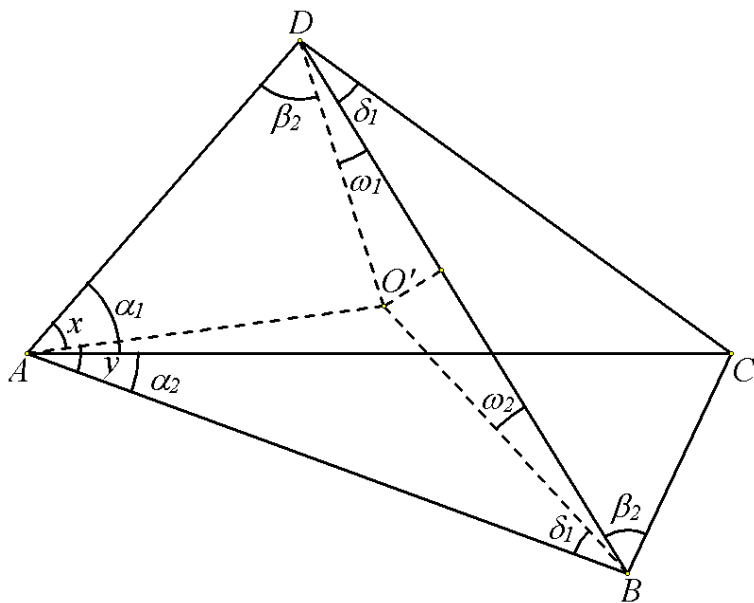
имаме $\omega_1 = \omega_2$. Следователно $BO' = DO'$, което означава, че точката O' лежи върху симетралата на диагонала BD . Остава да докажем, че O' лежи

върху AC . От синусовата теорема за $\triangle AO'D$ и $\triangle AO'B$ имаме съответно

$$\frac{\sin x}{\sin \beta_2} = \frac{DO'}{AO'} \quad \text{и} \quad \frac{\sin y}{\sin \delta_1} = \frac{BO'}{AO'}. \quad \text{От тези равенства и } BO' = DO' \text{ следва}$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \delta_1}. \quad \text{Освен това от синусовата теорема за } \triangle ACD \text{ имаме}$$

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \delta_1} = \frac{CD}{BC}. \quad \text{Оттук и предишното равенство получаваме } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{CD}{BC}.$$



Сега от синусовата теорема за триъгълниците ACD и ABC имаме съответно $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{AC}$ и $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \angle ABC} = \frac{BC}{AC}$. След разделяне на тези равенства получаваме $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ADC} = \frac{CD}{BC}$. Тъй като по условие $\angle ADC = \angle ABC$, то оттук имаме $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{CD}{BC}$. Това равенство заедно с $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{CD}{BC}$ води до $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$. Освен това $x + y = \alpha_1 + \alpha_2$. Затова $180^\circ - (x + y) = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Затова третите ъгли на триъгълниците Δ_1 и Δ_2 , които имат съответно ъгли x , y и α_1 , α_2 , са равни. От пропорцията $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ и синусовата теорема следва, че страните, сключващи тези ъгли, са пропорционални. Следователно $\Delta_1 \sim \Delta_2$. Оттук следва, че $x = \alpha_1$ и $y = \alpha_2$. Следователно O' е точка от правата AC . С това задачата е решена.

Задача 3. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на линейната функция $u = 3x - y + 4z + 15$, ако $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 14y - 12z + 123 = 0$.
Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: разглежданото уравнение може да се запише по следния начин $(x-8)^2 + (y-7)^2 + (z-6)^2 = 26$, което е уравнение на сфера s център $\Omega(8, 7, 6)$ и радиус $R = \sqrt{26}$. Нека $\vec{n}(3, -1, 4)$ е вектор, определен от коефициентите пред променливите x , y и z във функцията u . Най-малката и най-голямата стойност на u се получават в допирните точки съответно на допирателните равнини α_1 и α_2 към s , които са перпендикулярни на $\vec{n}(3, -1, 4)$. Следователно търсените екстремални стойности са пресечните точки на правата l , минаваща през Ω и успоредна на $\vec{n}(3, -1, 4)$. Правата l , определена от точката $\Omega(8, 7, 6)$ и колинеарния ѝ вектор $\vec{n}(3, -1, 4)$, има следните па-

раметрични уравнения $l: \begin{cases} x = 8 + 3t, \\ y = 7 - t, \\ z = 6 + 4t. \end{cases}$. Заместяваме x , y и z от последните

равенства в уравнението на s и получаваме $9t^2 + t^2 + 16t^2 = 26$, т.е. $t^2 = 1$. Следователно пресечните точки на l и s са $M_1(5, 8, 2)$ и $M_2(11, 6, 10)$, които се получават съответно при $t_1 = -1$ и $t_2 = 1$. Заместваме координатите на M_1 и M_2 във функцията u и получаваме $u_1(M_1) = 30$ и $u_2(M_2) = 82$. Следователно $u_{\min}(5, 8, 2) = 30$ и $u_{\max}(11, 6, 10) = 82$.

ГОДИШНО СЪДЪРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКО СПИСАНИЕ MATHEMATICS AND INFORMATICS JOURNAL OF EDUCATIONAL RESEARCH

PAGES / СТРАНИЦИ

Number 1 / Книжка 1:	1 – 120
Number 2 / Книжка 2:	121 – 256
Number 3 / Книжка 3:	257 – 376
Number 4 / Книжка 4:	377 – 480
Number 5 / Книжка 5:	481 – 584
Number 6 / Книжка 6:	585 – 712

07 – 10: EDITORIAL / КЪМ ЧИТАТЕЛЯ

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

108 – 112:	Решения на задачите от брой 2, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 2, 2018]
113 – 114:	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
244 – 244:	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
245 – 249:	Решения на задачите от брой 3, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 3, 2018]
364 – 364:	Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
365 – 370:	Решения на задачите от брой 4, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 4, 2018]

- 471 – 471: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
472 – 474: Решения на задачите от брой 5, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 5, 2018]
573 – 573: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
574 – 578: Решения на задачите от брой 6, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 6, 2018]
695 – 696: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
697 – 700: Решения на задачите от брой 1, 2019 [Solutions of the Contest Problems from Issue 1, 2019]

EDUCATIONAL MATTERS /
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ

- 11 – 31: Архивите говорят: Национални състезанията по информатика [The Archives Speak: National Competitions in Informatics] / *Павел Азълов / Pavel Azalov*
32 – 42: Методическа система формирования информационной культуры педагогов – психологов в информационной образовательной среде [A Methodical System for the Formation of Information Culture of Teachers – Psychologists in Information Educational Environment] / *Геннадий Киселев, Альбина Червова / Gennady Kiselev, Albina Chervova*
43 – 5: Increasing the Digital Competences of Students / *Lyubka Slavova, Kosta Garov*
127 – 155: Архивите говорят: Международни състезания по информатика [The Archives Speak: International Contests in Informatics] / *Павел Азълов / Pavel Azalov*
156 – 167: Електронен учебник по „Обзорни лекции“ за държавен изпит в средата DisPel [Electronic Textbook in Overview Lectures for State Examination in DisPel] / *Асен Рахнев, Боян Златанов, Евгения Ангелова, Ивайло Старибратов, Валя Арnaudова, Слав Чолаков / Asen Rahnev, Boyan Zlatanov, Evgeniya Angelova, Ivaylo Staribratov, Valya Arnaudova, Slav Cholakov*
168 – 179: Экспериментальная математика как область подготовки учащихся к исследовательской деятельности в формате “Science 2.0” [Experimental Mathematics as Environment for the Preparation of Students for Research in the Form “Science 2.0”] / *Лариса Удовенко,*

- Мария Шабанова, Магомедхан Ниматулиев / Maria Shabanova, Larisa Udovenko, Magomedhan Nimatuliev*
- 263 – 283: Математическите софизми и използването им в училищния курс по алгебра [Mathematical Fallacies and Their Use in the Algebraic Curriculum in Schools] / *Камелия Колева / Kamelia Koleva*
- 284 – 289: One Type of Problems with Infinite Number of Cube Roots / *Radan Miryanov, Katya Chalakova*
- 290 – 300: Some Math Quizzes for Presenting a Number by Using Equal Digits and Math Operations / *Deyan Mihaylov, Velina Yordanova*
- 301 – 304: A Note on the Arbelos in Wasan Geometry: Satoh's Problem ND a Circle Pattern / *Hiroshi Okumura*
- 383 – 403: Новая серия олимпиадных задач с шахматной тематикой: шахматная доска, ладьи и числа [A New Series of Olympiad Chess Problems: Chess Board, Rook and Numbers] / *Иван Попов / Ivan Popov*
- 404 – 411: The Rearrangement Inequality / *Šefket Arslanagić*
- 412 – 434: Астроида [Astroid] / *Борислав Борисов, Деян Димитров, Николай Нинов, Теодор Христов / Borislav Borisov, Deyan Dimitrov, Nikolay Ninov, Teodor Hristov*
- 435 – 443: Полиноми с кратни корени във върховете на успоредник [Polynomials with Multiple Roots in the Vertices of a Parallelogram] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 487 – 499: Preparing Primary Junior Grade Teachers to Teach Computational Teaching: Experiences from the Glat Project / *Natasa Hoic-Bozic, Darko Lončarić, Martina Holenko Dlab*
- 500 – 508: Cloud Technologies Implementation in Secondary Education / *Lyubka Slavova, Kosta Garov*
- 509 – 516: Google Classroom – An Innovative Approach to a More Efficient Organization of Learning / *Muharem Mollov*
- 517 – 526: To Read or Interact with Textbooks – What is Better for Learners? / *Gabriela Kiryakova*
- 591 – 601: Discrete Mathematics and Programming – Teaching and Learning Approaches / *Mariyana Raykova, Hristina Kostadinova, Stoyan Boev*
- 602 – 615: Автоматизирано управление на мрежова инфраструктура [Automated Management of Network Infrastructure] / *Христо Хри-*

стов, Ангел Игнатов / *Hristo Hristov, Angel Ignatov*

616 – 625: Converter from Moodle Lessons to Interactive Epub Ebooks / *Martin Takev, Elena Somova, Miguel Rodriguez-Artacho*

626 – 635: Циклоида [Cycloid] / *Аяпбергенов Азамат, Бокаева Молдир, Чурымбаев Бекнур, Калдыбек Жансуйген / Ayapbergenov Azamat, Bokaeva Moldir, Churymbaev Beknur, Kaldybek Zhansuygen*

636 – 647: Кардиоида [Cardioide] / *Евгений Воронцов, Никита Платонов / Vorontsov Eugene, Platonov Nikita*

EDUCATIONAL TECHNOLOGIES / ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ

53 – 71: Система от задачи в обучението по математика [System of Tasks in Mathematics Education] / *Петя Асенова, Марин Маринов / Petya Asenova, Marin Marinov*

72 – 76: Euler-Gergonne's Theorem and Its Applications / *Šefket Arslanagić*

77 – 90: Едно твърдение за конкурентност на педални окръжности на точка в равнината на четириъгълник [A Statement for Concurrence of Pedal Circles of a Point in the Plane of a Quadrilateral] / *Хаим Хаимов / Haim Haimov*

91 – 96: Polynomials of Fourth Degree with Colinear Central Symmetric Roots [Полиноми от четвърта степен с колинеарни централно симетрични корени] / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

97 – 107: Problem 6. From IMO'2018 [Задача 6. От IMO'2018] / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

180 – 193: Геометрични места, породени от равностранни триъгълници с върхове върху окръжност [Loci, Generated by Equilateral Triangles with Vertices Lying on a Circle] / *Борислав Борисов, Деян Димитров, Николай Нинов, Теодор Христов / Borislav Borisov, Deyan Dimitrov, Nikolay Ninov, Teodor Hristov*

194 – 202: Идеи за геометрично моделиране при решаване на комбинаторни задачи [Geometric Modeling in Combinatoric Problems] / *Наталия Павлова / Natalia Pavlova*

203 – 215: One Generalization of the Geometric Problem from 19th Junior Balkan Mathematical Olympiad [Обобщение на геометричната задача от

- 19-ата младежка балканска олимпиада по математика] / *Ivaylo Staribratov, Radka Todorova* / *Ivaylo Staribratov, Radka Todorova*
- 216 – 228: Екстремални свойства на точката на Лемоан в четириъгълник [Extremal Properties of the Lemoine Point in the Quadrilateral] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов* / *Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*
- 229 – 236: Some Simple Interest Models / *Tanka Milkova*
- 237 – 243: A Triangle and a Trapezoid with a Common Conic [Триъгълник и трапец с обща крива от втора степен] / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 305 – 324: Формули за разстоянията от брокарианите и точката на Микел в четириъгълника до върховете и до средите на страните и диагоналите му [Formulaes for the Distances from the Brocardians and the Miquel Point in a Quadrilateral to Its Vertices and the Midpoints of Its Sides and Diagonals] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов* / *Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*
- 325 – 339: On the Concept of Bitwise Operations in the Programming Courses / *Krasimir Yordzhev*
- 340 – 351: Results of the First Week of Cybersecurity in Arkhangelsk Region / *Olga Troitskaya, Olga Bezumova, Elena Lytkina, Tatyana Shirikova*
- 352 – 363: Didactic Potential of Remote Contests in Computer Science / *Natalia Sofronova, Anatoliy Belchusov*
- 444 – 458: Computer Programming in Mathematics Education / *Marin Marinov, Lasko Laskov*
- 459 – 470: Creating Interactive and Traceable EPUB Learning Content from Moodle Courses / *Martin Takev, Miguel Rodríguez-Artacho, Elena Somova*
- 527 – 543: Дълбоко копие в C++ и Java [Deep Copy in C++ and Java] / *Христина Костадинова, Марияна Райкова* / *Hristina Kostadinova, Mariyana Raykova*
- 544 – 549: Полиноми с корени във върховете на медитангенциални многоъгълници [Polynomials with Roots in the Vertices of Medi-Tangential Polygons] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков* / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 550 – 560: Алгебраическое описание улиток Паскаля порядка n [Algebraic

- Description of Pascal's Snails of Order n] / *Сергей Ларин / Sergey Larin*
- 561 – 572: Проучване мнението на студентите за качеството на тяхната подготовка по математика и информационни технологии [Inquiry on Students' Opinion about the Quality of their Preparation in Mathematics and Information Technologies] / *Аделина Иванова, Владислав Тодоров / Adelina Ivanova, Vladislav Todorov*
- 648 – 658: Обобщение на точките на Ферма в равнината на триъгълника [A Generalization of the Fermat Points in the Plane of a Triangle] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 659 – 675: Други връзки между забележителни точки в четириъгълника [Other Connections Between Notable Points in the Quadrilateral] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов / Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov*
- 676 – 694: Болгарская олимпиада по финансовой и актуарной математике в России [Bulgarian Olympiad on Financial and Actuarial Mathematics is in Russia] / *Росен Николаев, Сава Гроздев, Богдана Конева, Нина Патронова, Мария Шабанова / Rosen Nikolaev, Sava Grozdev, Bogdana, Koneva, Nina Patronova, Maria Shabanova*