

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2018

Задача 1. Да се докаже, че:

а) $2015! + 2016! + 2017$ се дели на 2017 ;

б) $2017 + 2018!$ се дели на 4068289 .

Христо Лесов, Казанлък

Решение на Златка Петрова от Ямбол: а) От дефиницията за факториел имаме $2015! + 2016! + 2017 = 2015! + 2015! \cdot 2016 + 2017 = 2015! \cdot 2017 + 2017 = (2015! + 1) \cdot 2017$. Оттук очевидно следва, че разглежданото число се дели на 2017 .

б) Лесно се проверява, че 2017 е просто число. Затова от теоремата на Уилсън следва, че $(2017 - 1)! \equiv 1 \pmod{2017}$, т.е. $2016! \equiv -1 \pmod{2017}$. Сега, като вземем предвид, че $4068289 = 2017^2$, получаваме

$$\begin{aligned} 2017 + 2018! &= 2017 + 2016! \cdot 2017 \cdot 2018 = 2017 \cdot (1 + 2018 \cdot 2016!) \equiv \\ &\equiv 2017 \cdot (1 - 2018) \pmod{2017} \equiv 2017^2 \pmod{2017}, \end{aligned}$$

което доказва твърдение б).

Задача 2. Да се докаже, че всяка от симедианите в триъгълник с лице S разделя триъгълника на два триъгълника, лицата на които са корени на уравнението

$$(u^2 + v^2)^2 x^2 - S(u^2 + v^2)^2 x + S^2 u^2 v^2 = 0,$$

където u и v са дължините на прилежащите на симедианата страни на триъгълника.

Милен Найденов, Варна

Решение на Златка Петрова от Ямбол: ще докажем твърдението за симедиана през върха C на $\triangle ABC$. Нека $CA = u$, $CB = v$, CE е медиана, CP е симедиана (правите CE и CP са симетрични спрямо ъглополовящата при върха C), $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle ECB = \varphi$, S_1 и S_2 са съответно лицата на триъгълниците APC и BPC .

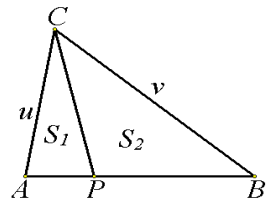
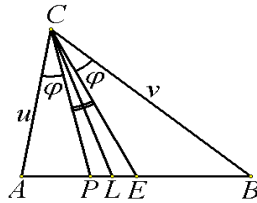
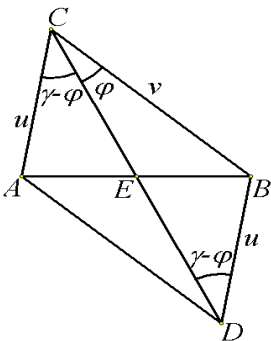
План за решение. 1) Доказваме, че $\frac{u}{v} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}$; 2) Определяме ъглите между симедианата и прилежащите към нея страни и използваме формулата $S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ за изразяване на отношението $S_1 : S_2$; 3) Намираме S_1 и S_2 по известни сбор и частно; 4) Съставяме уравнението с корени S_1 и S_2 , след което го преобразуваме до вида, посочен в условието на задачата.

Изпълнение на решението. Ако D е точката, симетрична на C спрямо E , ще получим успоредник $ADBC$. В триъгълника CDB са изпълнени равенствата $CB = v$, $BD = CA = u$, $\angle DCB = \varphi$ и $\angle CDB = \gamma - \varphi$. Прилагаме синусовата теорема за $\triangle CDB$ и стигаме до равенството 1). От симетрията на CP и CE спрямо ъглополовящата през върха C следва, че $\angle ACB$ и $\angle PCE$ имат обща ъглополовяща. Затова $\angle ACP = \angle ECB = \varphi$ и $\angle PCB = \gamma - \varphi$. От формулата за изразяване лицето на триъгълник чрез две страни и заключенния ъгъл между тях получаваме $\frac{S_1}{S_2} = \frac{u \cdot CP \cdot \sin \varphi}{v \cdot CP \cdot \sin(\gamma - \varphi)} = \frac{u \cdot \sin \varphi}{v \cdot \sin(\gamma - \varphi)}$. Оттук

и равенството 1) следва $\frac{S_1}{S_2} = \frac{u^2}{v^2}$. От свойството на пропорциите получаваме

последователно $\frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2}$, $\frac{S}{S_2} = \frac{u^2 + v^2}{v^2}$, $S_2 = \frac{Sv^2}{u^2 + v^2}$. Оттук следва,

че $S_1 = S - S_2 = \frac{Su^2}{u^2 + v^2}$. Едно уравнение, което има за корени S_1 и S_2 , е следното $(x - S_1)(x - S_2) = 0$, т.е. $x^2 - (S_1 + S_2)x + S_1S_2 = 0$. След заместване на получените изрази за S_1 и S_2 и извършване на някои преобразувания получаваме $(u^2 + v^2)^2 x^2 - S(u^2 + v^2)^2 x + S^2 u^2 v^2 = 0$. С това задачата е решена.



Задача 3. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център I , като продълженията на страните му AD и BC се пресичат в точка U . Ако M е втората пресечна точка на описаните окръжности на триъгълниците ABU и DCU , да се докаже, че $MI = \sqrt{MB \cdot BD}$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение на Златка Петрова от Ямбол: въвеждаме следните означения: $\sphericalangle AUB = \gamma$, $\sphericalangle MUA = \varphi$, радиусите на описаните окръжности за триъгълниците ABU и DCU са съответно с дължини R и r , а вторите пресечни точки на тези окръжности с правата UI са съответно K и P . С O означаваме центъра на вписаната в $\triangle DCU$ окръжност.

План на решението. 1) Доказваме, че $PI = PD$ и $KI = KA$; 2) Изразяваме чрез синусовата теорема отсечките MP , MK , DP , KA , MD и MB ; 3) Доказваме, че MI е ъглополовяща в $\triangle KPM$ и я изразяваме чрез формулата за ъглополовящата; 4) Извършваме тригонометрични преобразувания, за да докажем, че $MI = \sqrt{MB \cdot BD}$.

Помощна задача. Ако k е описаната окръжност на $\triangle ABC$, точката O е центърът на вписаната му окръжност и правата CO пресича k за втори път в точка T , то $TA = TA = TO$.

Доказателство: от това, че CO е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, следва, че T е среда на дъгата $\widehat{AB}$. Следователно хордите TA и TB са равни. Ако $\sphericalangle CAB = 2x$ и $\sphericalangle ACB = 2y$, то

$$\sphericalangle OAT = \sphericalangle OAB + \sphericalangle BAT = x + \sphericalangle BCT = x + y,$$

$$\sphericalangle AOT = \sphericalangle OAC + \sphericalangle ACO = x + y.$$

Следователно триъгълникът OAT е равнобедрен и $OT = AT$. Така получихме, че $TA = TA = TO$.

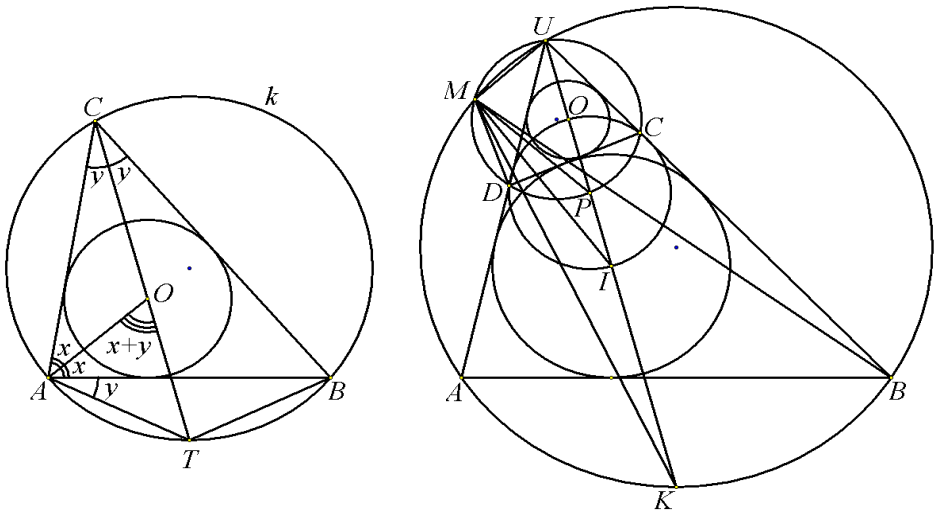
Преминаваме към решението на задачата. От помощната задача непосредствено следва, че $KI = KA$ и $PO = PC = PD$. Тогава точката P е център на описаната окръжност за $\triangle OCD$. Правите DI и DO са ъглополовящи на съседни ъгли, което означава, че $\sphericalangle ODI = 90^\circ$. Аналогично $\sphericalangle OCI = 90^\circ$. Следователно четириъгълникът $ODIC$ е вписан в окръжност с център P . Оттук следва, че $PI = PD$. Сега от синусовата теорема за триъгълниците MPU , MKU , DPU , AKU , MDU и MBU получаваме съответно

$$\text{но } MP = 2r \sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right), \quad MK = 2R \sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right), \quad PI = DP = 2r \sin \frac{\gamma}{2},$$

$KI = KA = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$, $MD = 2r \sin \varphi$ и $MB = 2R \sin(\varphi + \gamma)$. От тези равенства следва $MP : MK = PI : KI = r : R$. Следователно MI е ъглополовяща в $\triangle MKP$. Сега изразяваме ъглополовящата MI по следния начин:

$$MI^2 = MP \cdot MK - PI \cdot KI = 4rR \sin^2 \left(\varphi + \frac{\gamma}{2} \right) - 4rR \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 4rR \sin \varphi \sin(\varphi + \gamma) = MD \cdot MB.$$

С това задачата е решена.



ANNUAL CONTENTS/ГОДИШНО СЪДЪРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Научно списание, Година LXI, 2018

MATHEMATICS AND INFORMATICS

Journal of Educational Research and Practice; Volume 61, 2018

PAGES / СТРАНИЦИ

Number 1 / Книжка 1:	1 – 104
Number 2 / Книжка 2:	105 – 216
Number 3 / Книжка 3:	217 – 320
Number 4 / Книжка 4:	321 – 416
Number 5 / Книжка 5:	417 – 528
Number 6 / Книжка 6:	529 – 632

07 – 10: Editorial / Към читателя

111 – 112: Editorial / Към читателя

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

94 – 94: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

95 – 99: Решения на задачите от брой 2, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 2, 2017]

206 – 206: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

207 – 209: Решения на задачите от брой 3, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 3, 2017]

- 302 – 302: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
303 – 306: Решения на задачите от брой 4, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 4, 2017]
403 – 403: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
404 – 410: Решения на задачите от брой 5, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 5, 2017]
518 – 518: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
519 – 521: Решения на задачите от брой 6, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 6, 2017]
614 – 615: Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]
616 – 619: Решения на задачите от брой 1, 2018 [Solutions of the Contest Problems from Issue 1, 2018]

EDUCATIONAL MATTERS / НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ

- 10 – 18: Computer Discovered Mathematics: Constructions of Malfatti Squares [Математика, открита от компютри: конструкции на квадратите на Малфати] / *Sava Grozdev, Hiroshi Okumura, Deko Dekov*
19 – 48: Диагонални точкови конфигурации. Правило на триъгълника. Инварианти [Diagonal Configurations of Points. Triangle Rule. Invariants] / *Здравко Лалчев, Ирина Вутова / Zdravko Lalchev, Irina Voutova*
49 – 59: Осъществяване на вътрешнопредметни връзки в обучението по математика – тригонометрични функции и прогресии [Realization of Interdisciplinary Connections in Mathematics Training – Trigonometric Functions and Progressions] / *Зара Данаилова-Стойнова, Петър Данчев / Zara Danailova-Stoynova, Peter Danchev*
113 – 124: A Possibility to Teach and Learn Mathematics by Theatre Technology / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
125 – 143: Математически проекти в динамични среди [Mathematical Projects in Dynamic Environment] / *Ангел Гушев / Angel Gushev*

- 144 – 153: Практикоприложни задачи в обучението по математика [Practice-Applicable Problems in Mathematics Education] / Румяна Несторова / *Rumyana Nestorova*
- 154 – 163: Решаване на линейни уравнения с Excel [Solving Linear Equations with Excel] / Пламен Пенев / *Plamen Penev*
- 164 – 170: Two Interesting Inequalities for Acute Triangles / Šefket Arslanagić, Amar Bašić
- 171 – 174: Computer Discovered Mathematics: an Alternative Construction of Malfatti Squares / Sava Grozdev, Hiroshi Okumura, Deko Dekov
- 223 – 231: Използване на линеен тренд при решаване на рационални уравнения [Using a Trendline to Solve Rational Equations] / Пламен Пенев / *Plamen Penev*
- 232 – 258: Създаване на игри в часовете по информатика чрез използване на генератор на случайни числа [Creating of Games in the Informatics Classes by Using a Generator of Random Numbers] / Емилия Николова, Даниела Тупарова / *Emilia Nikolova, Daniela Tuparova*
- 259 – 264: Как компютърът решава sudoku – математически модел на алгоритъма [How does the Computer Solve Sudoku – a Mathematical Model of the Algorithm] / Красимир Йорджев / *Krasimir Yordzhev*
- 327 – 337: За простите числа [About the Prime Numbers] / Сава Гроздев, Веселин Ненков / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 338 – 351: Инцентър на четириъгълник [Incenter of a Quadrilateral] / Станислав Стефанов / *Stanoslav Stefanov*
- 352 – 359: Полиноми с кратни корени във върховете на триъгълник [Polynomials with Multiple Roots in the Vertices of a Triangle] / Сава Гроздев, Веселин Ненков / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 423 – 443: Итоги проведения Второй международной олимпиады по финансовой и актуарной математике среди школьников и студентов [Results of the Second International Olympiad in Financial and Actuarial Mathematics for School and University Students] / Сава Гроздев, Росен Николаев, Мария Шабанова, Лариса Форкунова, Нина Патронова / *Sava Grozdev, Rosen Nikolaev, Maria Shabanova, Larisa Forkunova, Nina Patronova*

- 444 – 454: Learning and Assessment Based on Gamified E-Course in Moodle [Обучение и оценяване на основата на игровизиран е-курс в Moodle] / *Мария Гачкова, Мартин Такев, Елена Сомова / Mariya Gachkova, Martin Takev, Elena Somova*
- 455 – 464: Показателни, логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (IV част) [Exponential, Logarithmic and Trigonometric Functions in Transcendental Equations (Part IV)] / *Диана Стефанова / Diana Stefanova*
- 465 – 480: Улитка Паскаля [Pascal's Limacon] / *Дарья Контева, Ксения Горская / Daria Kopteva, Kseniya Gorskaya*
- 535 – 541: Графические калькуляторы Casio как средство профессионализации фундаментального образования [Graphing Calculator Casio as a Means of Professionalization of Fundamental Education] / *Александр Луканкин, Ирина Слободская / Alexandr Lukankin, Irina Slobodskaya*
- 542 – 552: The Role of Computer Animation in Mathematics Teaching / *Sergey Larin, Valeriy Mayer*
- 553 – 565: Управление на софтуерно дефинираните мрежи с Floodlight Controller [Management of Software Defined Networks with Floodlight Controller] / *Румен Тодоров / Rumen Todorov*
- 566 – 584: „Энциклопедия замечательных плоских кривых“ – международный сетевой исследовательский проект в рамках MITE [“Encyclopedia of Notable Plane Curves” – an International Network Research Project within the Frames of MITE] / *Роза Атамуратова, Михаил Алфёров, Марина Белорукова, Веселин Ненков, Валерий Майер, Геннадий Клековкин, Раиса Овчинникова, Мария Шабанова, Александр Ястребов / Roza Atamuratova, Mikhail Alferov, Marina Belorukova, Veselin Nenkov, Valeriy Mayer, Gennady Klekovkin, Raisa Ovchinnikova, Maria Shabanova, Alexander Yastrebov*
- 585 – 595: Идентифициране на надарени ученици по математика чрез феномените на Жан Пиаже [Identification of Gifted Students in Mathematics by Jean Piaget's Phenomena] / *Милен Замфиров / Milen Zamfirov*

**EDUCATIONAL TECHNOLOGIES /
ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ**

- 60 – 72: Равнолицеви триъгълници, определени от две преобразувания в равнината на триъгълник [Triangles with Equal Areas, Generated by Two Transformations in the Triangle Plane] / *Иван Стефанов, Деян Димитров, Борислав Борисов / Ivan Stefanov, Deyan Dimitrov, Borislav Borisov*
- 73 – 82: Връзки между забележителни точки в четириъгълника [Connections among Notable Points in the Quadrilateral] / *Станислав Стефанов, Веселин Ненков / Stanislav Stefanov, Veselin Nenkov*
- 83 – 93: Тройки централни конични сечения през постоянна точка върху конично сечение [Central Conic Triplets through a Fixed Point on a Fixed Conic] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 175 – 189: Перфектна изогоналност в четириъгълник [Perfect Isogonality in Quadrilateral] / *Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов / Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*
- 190 – 199: Две трансформации в равнината на четириъгълник и тяхното приложение [Two Transformations in the Plane of a Triangle and Their Application] / *Димитър Опарлаков / Dimitar Oparlakov*
- 200 – 205: Някои типове задачи със симетрични числа [Some Types of Problems with Symmetric Numbers] / *Росен Николаев, Танка Милкова, Радан Мирянов / Rosen Nikolaev, Tanka Milkova, Radan Miryanov*
- 265 – 276: Постигане на творчески цели в обучението по математика в VI клас, раздел „Степенуване“ [Achieving Creative Goals in Mathematics Education in 6. Grade Section “Exponents”] / *Севдалина Георгиева / Sevdalina Georgieva*
- 277 – 282: Полиноми от трета степен с колинеарни корени [Polynomials of Third Degree with Collinear Roots] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

- 283 – 293: Полиноми от четвърта степен с корени във върховете на успоредник [Polynomials of Fourth Degree with Roots in the Vertices of a Parallelogram] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 294 – 298: Четиридесет и пета национална студентска олимпиада по математика [Forty Fifth National Olympiad in Mathematics for University Students] / *Сава Гроздев, Росен Николаев, Станислава Стоилова, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Rosen Nikolaev, Stanislava Stoilova, Veselin Nenkov*
- 299 – 301: Two New Phd Dissertations in Methodology of Informatics Teaching / *Petya Asenova*
- 360 – 367: Эпициклоида [Epicycloid] / *Инкар Аскар, Камила Сарсембаева / Inkar Askar, Kamila Sarsenbayeva*
- 368 – 377: Гипоциклоида [Hypocycloid] / *Борислав Борисов, Деян Димитров, Иван Стефанов, Николай Нинов, Теодор Христов / Borislav Borisov, Deyan Dimitrov, Ivan Stefanov, Nikolay Ninov, Teodor Hristov*
- 378 – 395: Множества от точки, породени от двойки равнобедрени триъгълници със специално разположение на основите [Sets of Points, Generated by a Pair of Isosceles Triangles with a Special Location of Their Bases] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 396 – 402: Четири нови докторски дисертации по методика на обучението по математика и информатика [Four New Phd Dissertations In Methodology of Mathematics and Informatics Teaching] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 481 – 497: Конструирание на един вид алгебрични криви в равнината на триъгълник [Construction of a Type of Algebraic Curves in the Plane of a Triangle] / *Веселин Ненков / Veselin Nenkov*
- 498 – 505: Полиноми с корени в три колинеарни точки [Polynomials with Roots in Three Collinear Points] / *Веселин Ненков / Veselin Nenkov*