

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2017

Задача 1. Нека $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ са различни прости числа, по-малки от 2017, за които числото $s_n = x_1^{2017} + x_2^{2017} + \dots + x_n^{2017}$ се дели на 2017. Да се намери най-малкото естествено число n , при което $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ приема най-малка стойност.

Христо Лесов – Казанлък

Решение: съгласно малката теорема на Ферма за всяко естествено число a и просто число p , числото $a^p - a$ се дели на p , т.е. a^p дава остатък a при деление на p . Тъй като 2017 е просто число, от тази теорема следва, че x_k^{2017} дава остатък x_k при деление на 2017 и s_n дава остатък $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ при деление на 2017. Но по условие s_n се дели на 2017, а $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ е естествено число, така че неговата най-малка стойност е 2017. Нека за определеност имаме $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. При $n=1$ са изпълнени неравенствата $2 < x_1 < 2017$ и не се получава решение на задачата. При $n=2$ имаме $x_1 + x_2 = 2017$. Ако $x_1 = 2$, то $x_2 = 2015$ не е просто число. Ако $x_1 \geq 3$ и $x_2 \geq 5$, то x_1 и x_2 са нечетни прости числа, а $x_1 + x_2$ е четно естествено число, т.е. различно от 2017. При $n=3$ имаме $x_1 + x_2 + x_3 = 2017$. Ако $x_1 = 2$, то $x_2 + x_3 = 2015$, като $x_2 \geq 3$ и $x_3 \geq 5$. Следователно x_2 и x_3 са нечетни прости числа, а $x_2 + x_3$ е четно естествено число, т.е. различно от 2015. Ако $x_1 = 3$, то $x_2 + x_3 = 2014$ и $x_2 = 11$, $x_3 = 2003$ са прости числа, които изпълняват изискванията на задачата. Следователно $n = 3$.

Задача 2. Целите числа a, b и c удовлетворяват равенството $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 0$. Да се докаже, че $(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ е точна трета степен на цяло число.

Тодор Митев – Русе

Решение: в статията на автора „Няколко олимпиадни задачи“, „Математика плюс“, 1, 2017, 48 – 50, е доказано следното твърдение. Ако k, u, v, w са реални числа, за които са изпълнени неравенствата $k \neq 0$ и $S = u + v + w \neq 0$, то равенствата $[(k-3)u + 3S][(k-3)v + 3S][(k-3)w + 3S] = (k^2 + 3k + 9)S^3$ и $u^3 + v^3 + w^3 = kuvw$ са еквивалентни.

Прилагаме това твърдение при $k = -6$, $u = a$, $v = b$ и $w = c$. Получаваме равенството

$$(-6a + 3b + 3c)(3a - 6b + 3c)(3a + 3b - 6c) = 27(a + b + c)^3,$$

т.е.

$$(b + c - 2a)(c + a - 2b)(a + b - 2c) = (a + b + c)^3.$$

Това доказва твърдението на задачата.

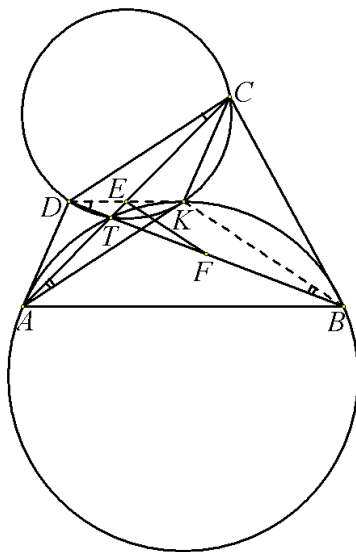
Задача 3. За изпъкналият четириъгълник $ABCD$ са изпълнени условията $AC = BD$, $CD^2 = AD \cdot AB$ ($CD \neq AD$) и $\angle CAD = \angle ABD$. Ако E и F са средите съответно на диагоналите AC и BD , да се докаже, че $CD = 2EF$.

Хаим Хаимов – Варна

Решение: означаваме с T пресечната точка на диагоналите AC и BD , а с K – втората пресечна точка на описаните около триъгълниците ABT и CDT окръжности. От свойствата на вписаните ъгли имаме равенствата $\angle KDB = \angle KDT = \angle KCT = \angle KCA$. Аналогично се получава $\angle KBD = \angle KAC$. Следователно

$$\triangle ACK \sim \triangle BDK. \text{ Оттук следват равенствата } \frac{KC}{KD} = \frac{KA}{KB} = \frac{AC}{BD} = 1,$$

т.е. $KC = KD$ и $KA = KB$. Освен това $\angle AKB = \angle ATB = \angle CTD = \angle CKD$. Затова равнобедрените триъгълници ABK и CDK са по-



добни. Следователно $\frac{AK}{CK} = \frac{AB}{CD}$. Като вземем пред-
вид, че по условие е изпълнено равенството $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{AD}$,
получаваме $\frac{AK}{CK} = \frac{CD}{AD}$. Нека сега K_1 е точката, симетрична на
 D спрямо E . Ще докажем, че $K_1 \equiv K$. За целта да допуснем, че
това не е вярно. Четириъгълникът AK_1CD е успоредник, откъде-
то следва, че $AK_1 = CD$ и $CK_1 = AD$. Тогава $\frac{AK_1}{CK_1} = \frac{CD}{AD} = \frac{AK}{CK}$.

Освен това от успоредника AK_1CD следва, че $\sphericalangle K_1AD = \sphericalangle K_1CD$. Тъй като
 $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$ (по условие) и $\sphericalangle KAC = \sphericalangle KBD$ (доказано по-горе), то
 $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle KBD + \sphericalangle ABD = \sphericalangle KBA$. От подобие на три-
ъгълниците ABK и CDK следва, че $\sphericalangle KBA = \sphericalangle KAB = \sphericalangle KCD$. Следовател-
но $\sphericalangle KAD = \sphericalangle KBA = \sphericalangle KCD$. Сега имаме $\sphericalangle K_1AK = |\sphericalangle K_1AD - \sphericalangle KAD| =$
 $= |\sphericalangle K_1CD - \sphericalangle KCD| = \sphericalangle K_1CK$. Оттук следва $\Delta K_1AK \sim \Delta K_1CK$, което оз-
начава, че $\Delta K_1AK \cong \Delta K_1CK$. Затова $AK_1 = CK_1$ и от успоредника AK_1CD
получаваме, че $AD = CD$. Но по условие $AD \neq CD$, а това води до противо-
речие с допускането, че $K_1 \neq K$. Следователно $K_1 \equiv K$ и $CD = AK = BK$.
Но EF е средна отсечка в ΔBKD и затова $BK = 2EF$. Следователно
 $CD = 2EF$.

ГОДИШНО СЪДЪРЖАНИЕ НА СП. „МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА“, 2017 Г.

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКО СПИСАНИЕ MATHEMATICS AND INFORMATICS JOURNAL OF EDUCATIONAL RESEARCH

PAGES / СТРАНИЦИ

Number 1 / Книжка 1: 1 – 104

Number 2 / Книжка 2: 105 – 224

Number 3 / Книжка 3: 225 – 328

Number 4 / Книжка 4: 329 – 432

Number 5 / Книжка 5: 433 – 536

Number 6 / Книжка 6: 537 – 656

7 – 10 Editorial / Към читателя

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

94 – 95 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

96 – 98 Решения на задачите от брой 2, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 2, 2016]

214 – 215 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

215 – 217 Решения на задачите от брой 3, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 3, 2016]

317 – 318 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

319 – 321 Решения на задачите от брой 4, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 4, 2016]

420 – 421 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of This Issue]

422 – 425 Решения на задачите от брой 5, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 5, 2016]

521 – 522 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of This Issue]

523 – 529 Решения на задачите от брой 6, 2016 [Solutions of the Contest Problems from Issue 6, 2016]

641 – 641 Конкурсни задачи на броя [Contest Problems of this Issue]

642 - 644 Решения на задачите от брой 1, 2017 [Solutions of the Contest Problems from Issue 1, 2017]

EDUCATIONAL RESEARCH / НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ

- 11 – 16 Развитие на методиката на обучението по математика [Development of the Didactics of Mathematics] / *Петър Петров / Petar Petrov*
- 17 – 49 Занимателните задачи на Поасон и методът на Перелман за тяхното решаване и изследване [Poisson's Amusing Problems and Perelman's Method for Their Solution and Study] / *Здравко Лалчев, Маргарита Върбанова, Мирослав Стоимиров / Zdravko Lalchev, Margarita Varbanova, Miroslav Stoimirov*
- 50 – 56 Векторно произведение и зависимости между лица на стени и сечения в някои многостени [Vector Product and Relations Between Side and Section Areas of Some Polyhedra] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 57 – 63 Показателни и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (I част) [Exponential and Trigonometric Functions in Transcendental Equations (Part I)] / *Диана Стефанова / Diana Stefanova*
- 111 – 122 NDM-Philosophy of Education in the 21st Century [NDM философията на образованието в XXI век] / *Marga Georgieva, Sava Grozdev*
- 123 – 148 Информационната грамотност – същност, проблеми и възможности за повишаване на информационната грамотност чрез използване на информационни технологии в училище [Information Literacy – Nature, Problems and Opportunities for Improving Information Literacy Through the Use of Information Technology in School] / *Веселин Дзивев / Vesselin Dzivev*
- 149 – 156 Изкуствена имунна система [Artificial Immune System] / *Йоанна Илиева, Селин Шемсиева, Светлана Вълчева, Сюзан Феимова / Joanna Ilieva, student, Selin Shemsieva, Svetlana Valcheva, student, Suzan Feimova*
- 157 – 173 Някои идеи за пропедевтика на понятието функция в началните класове [Some Ideas for Propaedeutics of the Concept of Function in Primary School] / *Катина Тончева, Маргарита Върбанова / Katina Toncheva, Margarita Varbanova*
- 231 – 242 Върху един модел на домашна работа в контекста на самостоятелната работа в обучението по математика [On a Model of the Homework in the Context of Self-Preparation in Mathematics Education] / *Марга Георгиева, Диана Стефанова / Marga Georgieva, Diana Stefanova*
- 243 – 251 Няколко приложения на теоремата на Менелай за вписани окръжности [Some Applications of Menelaus Theorem to Inscribed Circles] / *Александра Йовкова, Ирина Христова, Лили Стефанова / Alexandra Yovkova, Irina Hristova, Lilly Stefanova*
- 335 – 343 За дневния ред в образованието [For the Agenda in the Education] / *Сава Гроздев / Sava Grozdev*

- 344 – 350 Генератор на тестове [Test Generator] / Ангел Ангелов, Веселин Дзивев / *Angel Angelov, Vesselin Dzivev*
- 439 – 449 Интегративни връзки в компетентностния подход в обучението по математика и информационни технологии [Information Integrative Relationships in the Competent Approach in Mathematics Technology Training] / Коста Гъргов, Севдалина Георгиева, Елена Ковачева, Ангел Ангелов / *Kosta Garov, Sevdalina Georgieva, Elena Kovacheva, Angel Angelov*
- 450 – 456 Някои начини за решаване на алгебрични задачи [Some Ways in Solving Algebraic Problems] / Диана Стефанова / *Diana Stefanova*
- 457 – 465 Второй международный сетевой исследовательский проект учащихся в рамках МИТЕ [Second International Net Research Student Project in the Frames of MITE] / Мария Шабанова, Марина Белорукова, Роза Атамуратова, Веселин Ненков / *Maria Shabanova, Marina Belorukova, Roza Atamuratova, Veselin Nenkov*
- 466 – 473 Дидактически сценарий върху една задача от XXI младежка балканска математическа олимпиада [Didactic Scenario on a Problem from the 21st Junior Balkan Mathematical Olympiad] / Борислав Лазаров / *Borislav Lazarov*
- 543 – 550 A Survey of Mathematics Discovered by Computers. Part 2. / Сава Гроздев, Hiroshi Okumura, Deko Dekov
- 551 – 564 Три инварианти в одну задачу [Three Invariants in One Problem] / Ксения Горская, Дарья Коптева, Асхат Ермекбаев, Арман Жетиру, Азат Бермухамедов, Салтанат Кошер, Лили Стефанова, Ирина Христова, Александра Йовкова / *Kseniya Gorskaya, Daria Kopteva, Ashat Ermekbaev, Arman Zhetiru, Azat Bermuhamedov, Saltanat Koshers, Lilly Stefanova, Irina Hristova, Alexandra Yovkova*
- 565 – 576 Games with Modified Dice / Алдияр Жумашов

EDUCATIONAL TECHNOLOGIES / ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ

- 64 – 80 Ойлерова права и Ойлерова крива на вписан многоъгълник в конично сечение [An Inscribed Polygon in a Conic] / Веселин Ненков, Даниел Ангелов / *Veselin Nenkov, Daniel Angelov*
- 81 – 93 Геометрия на четириъгълника, точка на Микел, инверсна изогоналност [Geometry of the Quadrilateral, Miquel Point, Inversion] / Веселин Ненков, Станислав Стефанов, Хаим Хаимов / *Veselin Nenkov, Stanislav Stefanov, Haim Haimov*
- 174 – 180 Четиринадесета международна олимпиада по лингвистика [Fourteenth International Linguistics Olympiads] / Иван Держански / *Ivan Derzhanski*
- 181 – 201 Ветрила от окръжности във вписани многоъгълници [Fans of Circles in Inscribed Polygons] / Сава Гроздев, Веселин Ненков / *Sava Grozdev, Veselin Nenkov*

- 202 – 206 Бележка върху теоремата за степенните средни и обучаващия характер на олимпиадите [A Note On the Theorem of the Power Averages and the Educational Character of the Olympiads] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 207 – 213 Втори коледен лингвистичен турнир [Second Christmas Linguistics Tournament] / *Иван Держански, Веселин Златилов / Ivan Derzhanski, Veselin Zlatilov*
- 252 – 261 Втори псевдоцентър на четириъгълника [Second Pseudocenter of the Quadrilateral] / *Станислав Стефанов / Stanislav Stefanov*
- 262 – 273 Няколко задачи за окръжности, допиращи се до конични сечения [Several Problems for Circles Tangent to Conics] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 274 – 284 Приложение на един нов подход при моделиране на образователен софтуер [Application of a New Approach to Educational Software Modeling] / *Милен Замфиров / Milen Zamfirov*
- 285 – 290 Образователни платформи в организацията на педагогическите практики на бъдещите учители [Educational Platforms in the Organization of Pedgogical Practice for Future Teachers] / *Красимир Харизанов, Наталия Павлова / Krasimir Harizanov, Natalia Pavlova*
- 291 – 294 Национална студентска олимпиада по математика [National Mathematical Olympiad for University Students] / *Сава Гроздев, Росен Николаев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Rosen Nikolaev, Veselin Nenkov*
- 295 – 298 Бележка върху една от задачите за VII клас – 22 май 2017 г. [A Note on One of the Problems for 7th Grade – May 22, 2017] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 299 – 307 Геннадий Луканкин: скромный портрет в интерьере эпохи (к 80-летию со дня рождения) [Genadii Lukankin: a Modest Picture in the Interior of the Epoch (on Occasion of the 80-Anniversary)] / *Борис Тебиев, Александър Луканкин / Boris Tebiev, Alexander Lukankin*
- 308 – 316 Спомен за професор Антон Шоурек [A Memory of Professor Anton Shourek] / *Александра Трифонова / Aleksandra Trifonova*
- 351 – 362 Логаритмични и тригонометрични функции в трансцендентни уравнения (II част) [Logarithmic and Trigonometric Functions in Transcendental Equations (part II)] / *Диана Стефанова / Diana Stefanova*
- 363 – 369 Приложение на връзката между средно аритметично и средно геометрично за рационално доказване на някои неравенства [An Application of the Relation Between Arithmetic Mean and Geometric Mean for Rational Proving Some Inequalities] / *Радан Мирянов, Йордан Петков / Radan Miryanov, Jordan Petkov*

- 370 – 376 Определяне броя на корените на един клас параметрични алгебрични уравнения от трета степен [Determining the Number of the Roots of a Class of Third Order Parametric Algebraic Equations] / *Росен Николаев, Танка Милкова / Rosen Nikolaev, Tanka Milkova*
- 377 – 381 Interesting Proofs of Some Algebraic Inequalities / *Šefket Arslanagić, Faruk Zejnullahi*
- 382 – 390 Problems on the Brocard Circle / *Sava Grozdev, Hiroshi Okumura, Deko Dekov*
- 391 – 400 Няколко конструкции, породени от принципа за дуалност [Some Constructions, Generated by the Duality Principle] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 401 – 409 Приложение на линейната алгебра в икономиката [Application of Linear Algebra in Economics] / *Велика Кунева, Захаринка Ангелова / Velika Kuneva, Zaharinka Angelova*
- 410 – 419 Скоростта на светлината [The Speed of Light] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 474 – 480 Some Numerical Sequences Concerning Square Roots (Part One) [Числови редици, свързани с квадратни корени (първа част)] / *Rosen Nikolaev, Tanka Milkova, Yordan Petkov*
- 481 – 500 Доказателства и уточнения на експериментално получените твърдения чрез принципа за дуалност [Proofs and Specifications of Experimentally Derived Assertions by the Duality Principle] / *Сава Гроздев, Веселин Ненков / Sava Grozdev, Veselin Nenkov*
- 501 – 514 Erdős' Distinct Distances Problem [Проблемът на Ердьош за различните разстояния] / *Houssam Zenati*
- 515 – 520 Optimizing the Positioning of Serving Units in Tourism Business [Оптимизация на позиционирането на обслужващи единици в туристическия бизнес] / *Radan Miryanov, Velina Yordanova*
- 577 – 600 Елементарни точкови конфигурации. Диагонален принцип. Инварианти [Basic Configurations of Points. Diagonal Principle. Invariants] / *Здравко Лалчев, Ирина Вутова / Zdravko Lalchev, Irina Voutova*
- 601 – 615 Логаритмични и показателни функции в трансцендентни уравнения (III част) [Logarithmic and Exponential Functions in Transcendental Equations (Part III)] / *Диана Стефанова / Diana Stefanova*
- 616 – 625 Some Numerical Sequences Concerning Square Roots (Part Two) / *Rosen Nikolaev, Tanka Milkova, Yordan Petkov*
- 626 – 640 Занимателни задачи по темата „Картинна галерия“ [Entertaining Problems on the Topic „Picture Gallery“] / *Мирослав Стоимиров, Ирина Вутова / Miroslav Stoimirov, Irina Voutova*