

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2013

Задача 1. Да се докаже, че при обичайните означения за всеки триъгълник са изпълнени неравенствата

$$3 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \leq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 3 \left[\frac{(a+b+c)^3}{16abc} - 1 \right].$$

Йон Недялку, Пловещ, Румъния

Лучиан Туцеску, Крайова, Румъния

Решение: От формулите на Ойлер и неравенството между средното аритметично и средното геометрично получаваме лявото неравенство по следния начин:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 3 - 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = \\ &= 3 - 2 \left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} + \frac{(p-a)(p-b)}{ab} \right] = \\ &= 3 - 2 \left[a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) + c(p-a)(p-b) \right] \geq \\ &= 3 - \frac{2}{abc} \left[a \left(\frac{2p-b-c}{2} \right)^2 + b \left(\frac{2p-c-a}{2} \right)^2 + c \left(\frac{2p-a-b}{2} \right)^2 \right] = 3 - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}. \end{aligned}$$

Равенство се достига точно когато $a = b = c$.

От формулите на Ойлер и неравенството между средното аритметично и средното геометрично получаваме лявото неравенство по следния начин:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) - 3 = \\ &= 2 \left[\frac{p(p-a)}{bc} + \frac{p(p-b)}{ca} + \frac{p(p-c)}{ab} \right] - 3 = \frac{2p}{abc} [a(p-a) + b(p-b) + c(p-c)] - 3 < \\ &< \frac{2p}{abc} \cdot \frac{3p^2}{4} - 3 = 3 \left[\frac{(a+b+c)^3}{16abc} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Задача 2. Да се намерят всички реалнозначни функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, които са непрекъснати в точката $x = 0$ и $2f(2x) = f(x) + x$ за всички реални стойности на x .

Живко Желев, Стара Загора

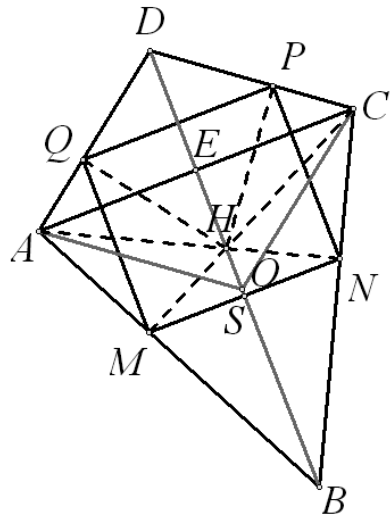
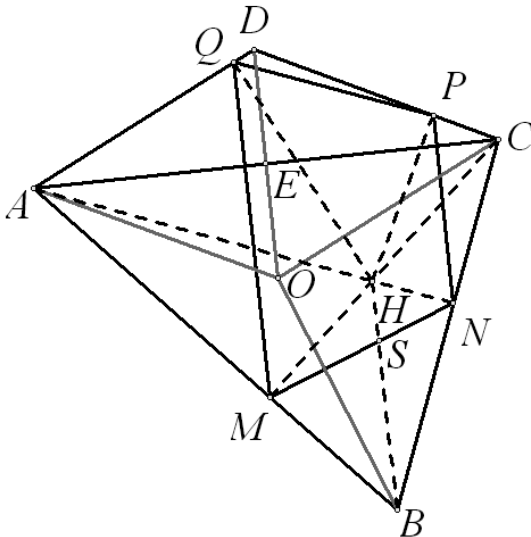
Решение: Като използваме функционалното условие и факта, че функцията е непрекъсната в точката $x = 0$, последователно можем да запишем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8} \right] + \frac{x}{4} = \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} = \\ &= \dots = \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{4} + \frac{x}{16} + \dots + \frac{x}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{4^k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{2^n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{4^k} = 0 \cdot f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x}{4^k} = 0 + x \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{x}{3}. \end{aligned}$$

Следователно търсената функция е $f(x) = \frac{x}{3}$.

Задача 3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $\sphericalangle ADC = 2\sphericalangle ABC$ и $AD = CD$. Да се докаже, че ортогоналните проекции на ортоцентъра H на $\triangle ABC$ върху страните на $ABCD$ са върхове на равнобедрен трапец или успоредник.

Хаим Хаимов, Варна



Решение: Означаваме ортогоналните проекции на H върху AB , BC , CA и DA съответно с M , N , P и Q . Тъй като четириъгълниците $AMHQ$, $QHPD$ и $PHNC$ са вписани, то $\sphericalangle AMQ = \sphericalangle AHQ$, $\sphericalangle QHP = 180^\circ - \sphericalangle QDP = 180^\circ - \sphericalangle ADC = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle CNP = \sphericalangle CHP$. От друга страна H е ортоцентър и затова $\sphericalangle AHC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$. Така получаваме $\sphericalangle AMQ + \sphericalangle CNP = \sphericalangle AHQ + \sphericalangle CHP = \sphericalangle AHC - \sphericalangle QHP = (180^\circ - \sphericalangle ABC) - (180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ABC) = \sphericalangle ABC$, т.е. $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AMQ + \sphericalangle CNP$. Нека S е такава точка в $\sphericalangle ABC$, че $BS \parallel QM$. Тогава $\sphericalangle ABS = \sphericalangle AMQ$ и $\sphericalangle NBS = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABS = (\sphericalangle AMQ + \sphericalangle CNP) - \sphericalangle AMQ = \sphericalangle CNP$. Оттук следва, че $PN \parallel BS$. Следователно $QM \parallel BS \parallel PN$.

Нека сега O е центърът на описаната за $\triangle ABC$ окръжност и $\sphericalangle ABC = \beta$. От $AD = CD$, $\sphericalangle ADC = 2\beta$, $AO = CO$ и $\sphericalangle ADC - 2\beta$ следва, че $\triangle ADC \cong \triangle AOC$. Оттук лесно се вижда, че $AOCD$ е ромб. Пресечната точка E на диагоналите му е среда на AC и OD , $DO \perp AC$ и $\sphericalangle EOD = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \beta$. Затова $DO = 2 \cdot OE = 2 \cdot EC \cdot \cotg \beta = AC \cdot \cotg \beta = BH$, т.е. $DO = BH$. Тъй като $DO \perp AC$ и $BH \perp AC$, то $DO \parallel BH$. Следователно $DOBH$ е успоредник и $DH = BO = \frac{AC}{2 \sin \beta}$. Точките Q и P лежат на окръжността с диаметър DH . От синусовата теорема за $\triangle QDP$, който също е вписан в тази окръжност, имаме $QP = DH \sin \sphericalangle QDP = \frac{AC}{2 \sin \beta} \sin 2\beta = AC \cos \beta$. Освен това $MN = AC \cos \beta$ (от свойствата на височините в $\triangle ABC$). Затова $QP = MN$. Следователно $MNPQ$ е равнобедрен трапец или успоредник.