

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2012

Задача 1. Покажете, че кубът на всяко рационално число може да се представи като сума от кубовете на три рационални числа.

Йонуц Иваненску, Крайова, Румъния

Решение (Йонуц Иваненску): Нека a и b са произволни рационални числа. Лесно се проверява, че е изпълнено равенството:

$$(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)^3 = a^3(a^3 - 2b^3)^3 - b^3(b^3 - 2a^3)^3.$$

Оттук при $b \neq -a$ получаваме $a^3 = b^3 + \left(\frac{a^4 - 2ab^3}{a^3 + b^3} \right)^3 + \left(\frac{2a^3b - b^4}{a^3 + b^3} \right)^3$. С това е намерено желаното представяне на произволно рационално число a .

Задача 2. Във вътрешността на триъгълник ABC е взета точка P и през нея са построени отсечки A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 , съответно успоредни на AB , BC и CA , като $A_1, A_2 \in BC$, $B_1, B_2 \in CA$ и $C_1, C_2 \in AB$.

а) Да се докаже, че лицата на триъгълниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са равни.

б) Да се определи положението на P така, че лицата на $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_2B_2C_2$ да бъдат максимални.

Христо Лесов, Казанлък

Решение (Христо Лесов):

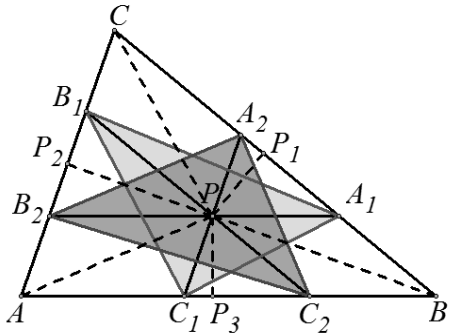
а) Тъй като P е вътрешна за ΔABC , то са изпълнени равенствата:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{A_1B_1P} + S_{B_1C_1P} + S_{C_1A_1P} \text{ и } S_{A_2B_2C_2} = S_{A_2B_2P} + S_{B_2C_2P} + S_{C_2A_2P}.$$

Според условието A_1CB_1P и A_2CB_2P са трапеци, откъдето следват съответно равенствата $S_{A_1B_1P} = S_{CB_1P}$ и $S_{A_2B_2P} = S_{CA_2P}$, а A_2CB_1P е успоредник, откъдето $S_{CB_1P} = S_{CA_2P}$. Следователно $S_{A_1B_1P} = S_{A_2B_2P}$. Аналогично се получават равенствата $S_{B_1C_1P} = S_{B_2C_2P}$ и $S_{C_1A_1P} = S_{C_2A_2P}$. Последните три равенства водят до $S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$.

б) Нека $PP_1 \perp BC$, $PP_2 \perp CA$, $PP_3 \perp AB$ ($P_1 \in BC$, $P_2 \in CA$, $P_3 \in AB$), $PP_1 = x$, $PP_2 = y$ и $PP_3 = z$. От $A_1B_2 \parallel AB$ и $B_1C_2 \parallel BC$ се получават съот-

ветно равенствата $\angle PA_1P_1 = \angle ABC = \beta$ и $\angle PB_1P_2 = \angle BCA = \gamma$. Затова от правоъгълните триъгълници PA_1P_1 и PB_1P_2 следват съответно равенствата $PA_1 = \frac{x}{\sin \beta}$ и $PB_1 = \frac{y}{\sin \gamma}$. Освен това $\angle A_1PB_1 = 180^\circ - \beta$. Затова $S_{A_1B_1P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sin \beta} \cdot \frac{y}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta = \frac{xy}{2 \sin \gamma}$.



Сега от синусовата теорема за $\triangle ABC$

при $AB = c$ следва $S_{A_1B_1P} = R \cdot \frac{xy}{c}$ (където R е радиусът на описаната за $\triangle ABC$ окръжност). Аналогично при $BC = a$ и $CA = b$ се получават равенствата $S_{B_1C_1P} = R \cdot \frac{yz}{a}$ и $S_{C_1A_1P} = R \cdot \frac{zx}{b}$. По-нататък, от $R = \frac{abc}{4S}$

($S = S_{ABC}$) следва $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4S} (ax \cdot by + by \cdot cz + cz \cdot ax)$. Тъй като P е въ-

трешна за $\triangle ABC$, то $S = S_{BCP} + S_{CAP} + S_{ABP} = \frac{1}{2} (ax + by + cz)$. Полагаме

$m = ax$, $n = by$ и $p = cz$. От равенството $m + n + p = 2S$ и неравенството

$mn + np + pm \leq \frac{1}{3} (m + n + p)^2 = \frac{4S^2}{3}$ (получава се от очевидното неравен-

ство $(m - n)^2 + (n - p)^2 + (p - m)^2 \geq 0$) следва $S_{A_1B_1C_1} \leq \frac{1}{4S} \cdot \frac{4S^2}{3} = \frac{S}{3}$. Сле-

дователно най-голямата стойност на $S_{A_1B_1C_1}$ е $\frac{S}{3}$ и тя се достига точно когато

$ax = by = cz = \frac{2S}{3}$ или $\frac{ax}{2S} = \frac{by}{2S} = \frac{cz}{2S} = \frac{1}{3}$, т.е. $\frac{x}{h_a} = \frac{y}{h_b} = \frac{z}{h_c} = \frac{1}{3}$ (h_a , h_b и h_c

са височините на $\triangle ABC$ съответно през A , B и C). Последните равенства са възможни само когато P е медицентър на $\triangle ABC$.

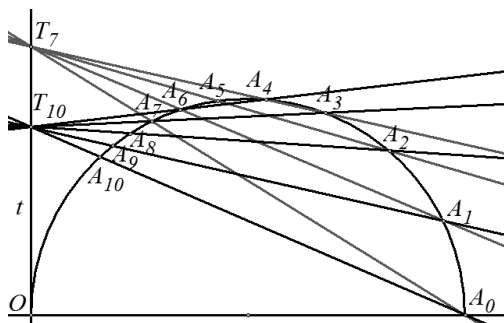
Задача 3. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ е редица от точки върху полуокръжността k с диаметър $OA_0 = 1$, дефинирана с равенствата $A_0A_n = \lambda n \cdot OA_n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), където λ е дадено положително число. Да се докаже, че:

- а) правите $A_i A_{n-i} \left(i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$ минават през една точка T_n ;
 б) точките T_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) лежат на една права.

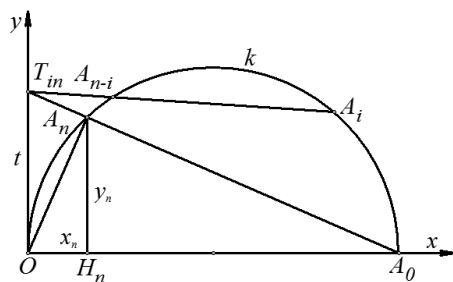
Хаим Хаимов, Варна

Решение (Хаим Хаимов): Ще докажем, че правите $A_i A_{n-i} \left(i = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right)$

пресичат допирателната t на k през точката O в една и съща точка T_n , т.е. точка, независеща от i . С това ще бъдат доказани и двете твърдения на задачата. На фиг. 1 са показани точките T_7 и T_{10} при $\lambda = 0, 23$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Означаваме с T_{in} пресечната точка на правата $A_i A_{n-i}$ с допирателната t . Въвеждаме координатна система $Ox y$ с оси $OA_0^{\rightarrow}$ и $t^{\rightarrow}$ (Фиг. 2). Понеже абсцисата x_{in} на T_{in} е равна на нула, достатъчно е да докажем, че ординатата ѝ y_{in} не зависи от индекса i . Нека $A_n(x_n, y_n)$ и H_n е ортогоналната проекция на A_n върху оста Ox за всяко естествено число n (Фиг. 2). Тъй като $\triangle OH_n A_n \sim \triangle OA_n A_0$, то $\frac{A_n H_n}{OH_n} = \frac{A_0 A_n}{OA_n}$ (Фиг. 2). Така от условието получаваме $\frac{y_n}{x_n} = n\lambda$. Освен това, от подобността на същите триъгълници следва $OA_n^2 = OH_n \cdot OA_0$, окъдето $OA_n^2 = OH_n$ (Фиг. 2). Тъй като $OA_n^2 = x_n^2 + y_n^2$, от последното равенство се

чава $x_n^2 + y_n^2 = x_n$. Така за координатите на A_n стигаме до системата

$$\begin{cases} x_n^2 + y_n^2 = x_n, \\ \frac{y_n}{x_n} = \lambda n. \end{cases}$$

След решаването ѝ получаваме $x_n = \frac{1}{1 + \lambda^2 n^2}$ и $y_n = \frac{\lambda n}{1 + \lambda^2 n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Сега, като вземем предвид, че точките T_{in} , A_{n-i} и A_i лежат на една права, получаваме равенството $\frac{y_{in} - y_i}{0 - x_i} = \frac{y_{in} - y_{n-i}}{0 - x_{n-i}}$. След заместване на получените резултати получаваме $y_{in} = \frac{1}{\lambda n}$. Последното равенство ни убеждава, че y_{in} не зависи от индекса i , с което задачата е решена.