

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 6, 2021 Г.

Задача 1. Дадени са 9 различни естествени числа, всяко от които има прости делители, не по-големи от 3. Докажете, че произведението на някои три от тези числа е точен куб.

Решение: числата са представим във вида $2^\alpha 3^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Нека разгледаме квадрат $(a_{ij}) = i, j$

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2

като поставяме числото $2^\alpha 3^\beta$ в клетка $\alpha \bmod 3, \beta \bmod 3$.

Ако е изпълнено едно от следните:

1. съществуват три числа на един ред или по един стълб или по един диагонал;
2. съществуват три числа в една клетка;
3. число в клетка-връх на квадрата и числа в средите на страните, несъдържащи този връх, например.

0,0	0,1	0,2
1,0	1,1	1,2
2,0	2,1	2,2

то произведението на трите числа е точен куб.

Затоа нека считаме, че няма клетка с повече от две числа и не всички клетки съдържат по число.

Нека $x \geq 1$ клетки имат по две числа и y – по едно. Тогава $2x + y = 9 \Rightarrow y$ е нечетно. Решенията на това уравнение са $(1,7)$, $(2,5)$, $(3,3)$ и $(4,1)$, като заетите клетки при всяко от тях са съответно 8, 7, 6 и 5.

Ще покажем, че няма как да имаме 5 заети клетки и да не са изпълнени 1 и 3.

Допускаме противното: имаме 5 заети клетки и 1 и 3 не са изпълнени.

Разглеждаме няколко случая в зависимост колко клетки в средите на страните са заети.

Случай 1: 4 клетки <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	Ако поставим 5-ото число във връх, ще е изпълнено 3. Ако го поставим в 1,1, ще е изпълнено 1.																			
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
Случай 2: 3 клетки <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	За да не е изпълнено 3: <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	За да не е изпълнено 1: <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
Остават две клетки и две числа, следователно първи ред е запълнен, т.е. 1 е изпълнено.																													
Случай 3: 2 клетки а) <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	За да не е изпълнено 3: <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table> Ако клетка 0,0 не е запълнена, то останалите три числа са по диагонала – противоречие с 1. Ако клетка 0,0 е запълнена, то тъй като останалите две числа не могат да са едновременно в 1,1, някоя от тях е в 2,0 или в 0,2, т.е. следва запълнен стълб или ред – противоречие с 1.		0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2									
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
б) <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	За да не е изпълнено 1: <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table> Остават 3 числа и два стълба, на които можем да ги сложим, следователно има стълб, съдържащ две от тях – противоречие с 1.		0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2									
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
Случай 4: 1 клетка <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	По стълб 1 можем да сложим най-много едно число, следователно останалите 3 клетки са заети. <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table> Където и да сложим останалото число, ще образуваме диагонал – противоречие с 1.		0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2									
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											
Случай 5: 0 клетки <table border="1"> <tr><td>0,0</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>1,0</td><td>1,1</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>2,0</td><td>2,1</td><td>2,2</td></tr> </table>	0,0	0,1	0,2	1,0	1,1	1,2	2,0	2,1	2,2	Остават 5 клетки и 5 числа. Те ще покриват диагоналите – противоречие с 1.																			
0,0	0,1	0,2																											
1,0	1,1	1,2																											
2,0	2,1	2,2																											

Задача 2. Намерете всички двойки естествени числа a и b , за които $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ са цели числа.

Решение: очевидно, ако (a, b) е решение, то и (b, a) е решение. Затова нека $b \geq a$.

Ако $b = 1 \Rightarrow a = 1$ и дробите не са дефинирани.

Следователно $b \geq 2 \Rightarrow b^2 > b \geq a \Rightarrow b^2 - a > 0 \Rightarrow \frac{a^2+b}{b^2-a} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 + b \geq b^2 - a \Rightarrow a^2 - b^2 + b + a \geq 0 \Rightarrow (a+b)(a-b+1) \geq 0 \Rightarrow b \leq a+1$.

Комбинирайки с по-горе, получаваме $a \leq b \leq a+1 \Rightarrow b \in \{a, a+1\}$.

Случай 1: $b = a$. Тогава дробите са

$$\frac{b^2+b}{b^2-b} = \frac{b+1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1} \Rightarrow (b-1) \mid 2 \Rightarrow b \in \{2, 3\}. \text{ Следователно решения са } (2, 2)$$

и $(3, 3)$.

Случай 2: $b = a+1$. Тогава $\frac{a^2+b}{b^2-a} = \frac{b^2-b+1}{b^2-b+1} = 1$, а $\frac{b^2+a}{a^2-b} = \frac{b^2+b-1}{b^2-3b+1}$.

Тъй като $b \geq 2b \geq 2$, знаменателят е отрицателен само при $b = 2$, при което $a = 1$. Замествайки в дробите, установяваме, че $(1, 2)$ е решение.

При $b \geq 3$:

$$\frac{b^2+b-1}{b^2-3b+1} = \frac{(b^2-3b+1)+(4b-2)}{b^2-3b+1} \Rightarrow (b^2-3b+1) \mid (4b-2) \Rightarrow 4b-2 \geq b^2-3b+1 \Rightarrow b \in \{3, 4, 5, 6\}.$$

Проверяваме, че само при $b = 3: (b^2-3b+1) \mid (4b-2)$. Тогава $a = 2$ и $(2, 3)$ е решение.

Като вземем предвид симетричните решения, получаваме всички решения: $(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)$.

Задача 3. Докажете, че за произволни положителни реални числа a, b и c е изпълнено неравенството

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Решение: имаме

$$(a^2 + x)(b^2 + x) = (a^2 + \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2} + b^2) \geq (a\sqrt{x} + \sqrt{x}b)^2 = x(a+b)^2(*),$$

като приложихме неравенството на Коши-Буняковски-Шварц.

$$\text{От СА-СК } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Тогава

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2) = (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1) + a^2 + b^2 + 3 = \underbrace{(a^2 + 1)(b^2 + 1)}_{(*)} + (a^2 + b^2) + 3 \geq (a + b)^2 + \frac{(a+b)^2}{2} + 3 = \frac{3}{2}(a + b)^2 + 3.$$

Известно е неравенството $\sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} ab \sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} ab$.

Тогава

$$\begin{aligned} (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) &\geq \left(\frac{3}{2}(a + b)^2 + 3\right)(c^2 + 2) = \frac{3}{2} \underbrace{((a + b)^2 + 2)(c^2 + 2)}_{(*)} \\ &\geq \frac{3}{2} \cdot 2(a + b + c)^2 = 3 \left(\sum_{cyc} a^2 + 2 \sum_{cyc} ab \right) \geq 9 \sum_{cyc} ab \end{aligned}$$

Мартин Любомиров Димитров – София

Редакцията на сп. „Математика и информатика“ награждава с годишен абонамент за списанието за 2022 г. Мартин Любомиров Димитров от София за предложените от него за този и предния брой решения на конкурсните задачи.