

<https://doi.org/10.53656/math2021-6-9-res>

Problems and Solutions
Конкурсни задачи

Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 5, 2021 Г.

Задача 1. Число, което е точен квадрат на естествено число, се записва с няколко единици и една двойка. Докажете, че това число се дели на 11.

Решение. Нека M е такова число. Можем да го запишем като

$$M = \underbrace{11 \dots 1}_m 2 \underbrace{11 \dots 1}_n$$

където $m, n \geq 0$ са броят на единиците съответно преди и след цифрата 2.

Тъй като няма точен квадрат, завършващ на 2: $n \geq 1$.

$$M = (1 + 10^1 + \dots + 10^{n-1}) + 2 \cdot 10^n + 10^{n+1}(1 + 10^1 + \dots + 10^{m-1}) = \frac{10^n - 1}{9} + 2 \cdot 10^n + \frac{10^{n+1}(10^m - 1)}{9} = \frac{10^n(9 + 10^{m+1}) - 1}{9}$$

Знаменателят е точен квадрат, значи числителят също е точен квадрат.

Очевидно числителят е нечетно число, следователно е $1 \pmod{4}$.

Ако $n \geq 2$: $10^n \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 10^n(9 + 10^{m+1}) - 1 \equiv -1 \pmod{4}$ – противоречие. Следователно $n = 1$ и

$$M = \frac{10^{m+2} + 89}{9}$$

Тъй като $10^{m+2} + 89 \equiv (-1)^{m+2} + 1 \pmod{11}$, е достатъчно да докажем, че m е нечетно.

Да допуснем обратното. Тогава

$$10^{m+2} + 89 = r^2 \Leftrightarrow \left(r + 10^{\frac{m+2}{2}}\right)\left(r - 10^{\frac{m+2}{2}}\right) = 89$$

Числото 89 е просто и $r - 10^{\frac{m+2}{2}} < r + 10^{\frac{m+2}{2}}$, следователно $r + 10^{\frac{m+2}{2}} = 89, r - 10^{\frac{m+2}{2}} = 1$, откъдето $10^{\frac{m+2}{2}} = 44$, което е невъзможно.

Задача 2. Квадрат 2021×2021 е разделен на квадрати 1×1 и 2×2 . Докажете, че има ред от квадрата, който пресичат нечетен брой от квадратите на разделянето.

Решение. Да допуснем, че твърдението не е вярно, т.е. всеки ред пресича четен брой квадрати. Нека квадратите 2×2 , които се пресичат от някой ред, са x на брой. Тъй като

всички останали квадрати са 1×1 , то този ред пресича x квадрата 2×2 и $2021 - 2x$ квадрата 1×1 , т.е. общо $x + 2021 - 2x = 2021 - x$ квадрата. Следователно x е нечетно число, което означава, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2 .

Да номерираме редовете на квадрата от долу нагоре с $1, 2, \dots, 2021$. Като приложим доказаното по-горе за първия ред, получаваме, че броят на квадратите, които лежат изцяло в първите два реда, е нечетен. Сега същото свойство за втория ред дава, че броят на квадратите, които лежат изцяло във втория и третия ред, е четен. По индукция следва, че броят на квадратите 2×2 , които лежат изцяло в i -ия и в $i + 1$ -ия ред, е нечетен при нечетно i и четен при четно i . Това означава, че броят на квадратите 2×2 , които лежат изцяло в 2020-ия и в 2021-вия ред е четен. Това е противоречие с доказаното, че всеки ред пресича нечетен брой квадрати 2×2 .

Задача 3: Дадени са различни естествени числа a, b и c , за които

$$(a + b)(a + c) = (b + c)^2$$

Докажете, че $(b - c)^2 > 8(b + c)$.

Решение. Нека d е най-големият общ делител на $a + b$ и $a + c$, т.е. $d = \text{НОД}(a + b, a + c)$. Тогава d дели $(a + b) - (a + c) = b - c$, а от условието следва, че d дели $b + c$. Следователно d дели $(b + c) + (b - c) = 2b$.

Ако съществува прост делител p на d , който дели b , то p дели a и c (тогава $a = pa_1$, $b = pb_1$ и $c = ca_1$) и равенството от условието се свежда до

$$(a_1 + b_1)(a_1 + c_1) = (b_1 + c_1)^2.$$

В този случай трябва да докажем, че $p^2(b_1 - c_1)^2 > 8(b_1 + c_1)$, и тъй като $p^2(b_1 - c_1)^2 > (b_1 - c_1)^2$, задачата се свежда до $d=1$ или $d=2$.

Ако $d=2$, получаваме $a + b = 2m^2$, $a + c = 2n^2$, като тогава $b + c = 2mn$ и $b - c = 2(m^2 - n^2)$. В този случай трябва да докажем

$$4(m^2 - n^2)^2 > 8.2.mn \Leftrightarrow (m^2 - n^2)^2 > 4mn \Leftrightarrow (m - n)^2(m + n)^2 > 4mn$$

Последното неравенство е вярно, защото $m \neq n$, и тогава $(m - n)^2 > 1, (m + n)^2 > 4mn$.

Ако $d=1$, получаваме $a + b = m^2$, $a + c = n^2$, като тогава $b + c = mn$ и $b - c = m^2 - n^2$.

В този случай трябва да докажем $(m^2 - n^2)^2 > 8mn \Leftrightarrow (m - n)^2(m + n)^2 > 8mn$. Тъй като $b + c = mn$ и $b - c = m^2 - n^2$ трябва да са с еднаква четност, то m и n са четни числа. Тогава $(m - n)^2 \geq 4$, а $(m + n)^2 > 4mn$ и неравенството е вярно.

Мартин Любомиров Димитров, София

**ANNUAL CONTENTS /
ГОДИШНО СЪДЪРЖАНИЕ
MATHEMATICS AND INFORMATICS /
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
VOLUME 64 (YR 2021) / ТОМ 64 (2021 Г.)**

PAGES / СТРАНИЦИ Number

1 / Книжка 1: 1 – 108

Number 2 / Книжка 2: 109 – 229

Number 3 / Книжка 3: 230 – 348

Number 4 / Книжка 4: 349 – 468

Number 5 / Книжка 5: 469 – 568

Number 6 / Книжка 6: 569 – 664

7 – 8 EDITORIAL / КЪМ ЧИТАТЕЛЯ

CONTEST PROBLEMS / КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ

- 114 – 114 Конкурсни задачи на броя [Problems and Solutions of this Issue]
239 – 239 Конкурсни задачи на броя [Problems of this Issue]
240 – 241 Решения на задачите от брой 1, 2021 [Solutions of problems from issue 1, 2021]
347 – 347 Конкурсни задачи на броя [Problems and Solutions of this Issue]
348 – 349 Решения на задачите от брой 2, 2021 [Solutions of Problems from Issue 2, 2021]
443 – 443 Конкурсни задачи на броя [Problems and Solutions of this Issue]
444 – 445 Решения на задачите от брой 3, 2021 [Solutions of problems from issue 3, 2021]
542 – 542 Конкурсни задачи на броя [Problems and Solutions of this Issue]
543 – 544 Решения на задачите от брой 4, 2021 [Solutions of problems from issue 4, 2021]
650 – 650 Конкурсни задачи на броя [Problems and Solutions of this Issue]
651 – 652 Решения на задачите от брой 5, 2021 [Solutions of problems from issue 5, 2021]

EDUCATIONAL ISSUES / ВЪПРОСИ НА ПРЕПОДАВАНЕТО

- 84 – 98 The Problem of Ensuring the Information Security of Children and Adolescents in the Context of Educational Internet Projects Implementation / *Alexander Fedosov, Anastasia Karnaukhova*
99 – 113 Дидактически модел за съставяне на система от задачи на базата на технологичния подход [Didactic Model for Generating a System of Problems Based on

- the Technological Approach] / *Слави Кадиев, Юлия Нинова / Slavi Kadiev, Julia Ninova*
- 207 – 221 Качествено изследване на конферентно онлайн обучение при студенти по уеб дизайн [Qualitative Research of Conference Online Learning for Web Design Students] / *Христо Христов, Николай Чочев / Hristo Hristov, Nikolay Chochev*
- 222 – 225 A Combinatorial Question Related to an Easter Tradition Led to a New Entry in OEIS / *Ivaylo Kortezov*
- 226 – 238 Evolution of the Content and Quality of Standardized Tests in Mathematics in Ukraine / *Vasyl Shvets, Oleksandr Shkolnyi, Iryna Dremova*
- 301 – 316 Midlines of Quadrilateral / *Sead Rešić, Maid Omerović, Anes Z. Hadžiomerović, Ahmed Palić*
- 317 – 334 Виртуален час по математика [Virtual Math Class] / *Севдалина Георгиева / Sevdalina Georgieva*
- 335 – 346 Къде е грешката в решението ми? — разговор пред бялата дъска с Олег Мушкаргов [Where is the Error in my Solution? — a Talk with Oleg Mushkarov in Front of the White Board] / *Евгения Сендова / Evgenia Sendova*
- 425 – 437 За природата на математиката и за математиката в природата — една приказка за симетрията с продължение за малки и големи [Of the Nature of Math and Math in Nature — a Sequel about Symmetry for Children and Adults] / *Цветелин Андреев / Cvetelin Andreev*
- 503 – 519 Добавена реалност при онлайн обучението на учители за придобиване на дигитална компетентност [Augmented Reality in Online Teacher Training for Digital Competence] / *Евгения Горанова, Валентина Войноховска / Evgenia Goranova, Valentina Voinohovska*
- 520 – 531 Educational Environment as a Form for Development of Math Teachers Methodological Competence / *Olha Matiash, Liubov Mykhailenko, Vasyl Shvets, Oleksandr Shkolnyi*
- 532 – 541 Организационен модел за провеждане на хоспитиране и текуща педагогическа практика по информатика и ИТ [Organizational Model for Pedagogical Practices of Informatics and IT] / *Филип Петров / Philip Petrov*
- 617 - 633 Preschool Teachers' Knowledge, Perspectives and Practices in STEM Education: An Interview Study / *Lyubka Aleksieva, Iliana Mirtschewa, Snezhana Radeva*
- 634 - 649 Introduction to Computer Programming Through a System of Tasks / *Lasko M. Laskov*
- EDUCATIONAL MATTERS / НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИ СТАТИИ
- 7 – 22 Подбор и участие на отбора на България в XXIV младежка балканиада по математика 2020 / [Selection and Participation of the Team of Bulgaria in the XXIV JBMO 2020] / *Ивайло Кортезов / Ivaylo Kortezov*

- 23 – 34 Седемнадесета Жаутиковска олимпиада по математика, информатика и физика, Алмати, 7 – 12 януари 2021 [The 17th Zhautykov Olympiad In Mathematics, Physics and Computer Science] / *Диян Димитров, Светлин Лалов, Стефан Хаджистойков, Елена Киселова* / *Diyan Dimitrov, Svetlin Lalov, Stefan Hadzhistoykov, Elena Kiselova*
- 35 – 50 Онлайн състезание „VIVA математика с компютър“ [Online Competition “VIVA Mathematics with Computer”] / *Петър Кендеров, Тони Чехларова, Георги Гачев* / *Petar Kenderov, Toni Chehlarova, Georgi Gachev*
- 51 – 61 Готови ли са съвременните обучаеми за иновативни форми на обучение? [Are the Digital Learners Ready for Innovative Forms of Learning?] / *Габриела Кирякова, Надежда Ангелова* / *Gabriela Kiryakova, Nadejda Angelova*
- 127 – 140 Computer and Information Literacy Assessment of Mathematics Professors and Lectures, Case Study of Islamic Azad University Branches in Tehran / *Fateme Moradi*
- 141 – 152 Mobile Math Game Prototype on the Base of Templates for Primary School / *Margarita Gocheva, Elena Somova, Nikolay Kasakliev, Vladimira Angelova*
- 153 – 172 Статистическата значимост – панацея или препъникамък? [Statistical Significance – is it a Panacea or a Pitfall?] / *Маргарита Ламбова* / *Margarita Lambova*
- 255 – 263 Some Problems in Engineering Education with Computer Science Profile during COVID-19 / *Georgi Tsochev*
- 264 – 277 Математиката като музика за душата [Mathematics as Music for the Soul] / *Евгения Сендова* / *Evgenia Sendova*
- 367 – 379 Financial Projects and Loans with Different, Decursive Annuities, Interest Rates and Capitalization Periods with the Use of Excel / *Sead Rešić, Vehbi Ramaj, Biljana Petković, Samira Aganović*
- 380 – 394 The Development of Methodical Approaches to the Implementation of the Propedeutic Course of Informatics in Primary School by Means of Kodu Game Lab / *Dmitry Pavlov, Adel Kaplan, Kirill Butarev*
- 395 – 409 Представяне на понятието конично сечение с компютър [Teaching the Notion Conic Section with Computer] / *Марин Маринов, Петя Асенова* / *Marin Marinov, Petya Azenova*
- 463 – 475 The Benefits of Collaborative Learning in Examining Functions with Parameters in Dynamic Software Environment I / *Radoslav Bozic, Djurdjica Takaci*
- 476 – 482 Some Methodological Guidelines on the Creation of Educational Games on “Computer Modeling” / *Krasimir Harizanov*
- 483 – 489 Подготовка за XXV младежка балканиада по математика 2021 / [Preparation for the XXV Youth Balkaniade in Mathematics 2021] / *Ивайло Кортезов, Емил Карлов, Мирослав Маринов* / *Ivaylo Kortezov, Emil Karlov, Miroslav Marinov*

- 563 – 584 Криворазбраните вероятности при тестове за наличие на зараза [Crowded Probabilities in Tests for the Presence of Infection] / *Маргарита Ламбова, Ваня Стоянова / Margarita Lambova, Vanya Stoyanova*

EDUCATIONAL TECHNOLOGIES / ОБРАЗОВАТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ

- 62 – 83 Електронни ресурси за онлайн обучение по математика в началните класове – същност, видове, качество [Electronic Resources for Online Mathematics Primary Education – Specifics, Types, Quality] / *Любка Алексиева / Lyubka Aleksieva*
- 173 – 181 Board Game “Making Financial Decisions” in the System of Teaching the Mathematical Foundations of Financial Literacy / *Bogdana Koneva, Maria Shabanova*
- 182 – 195 Implementing Computational Thinking in IT Training: an Invariant Framework for IT Knowledge Features / *Silvia Gaftandzhieva, Rositsa Doneva, Marieta Atanasova*
- 196 – 206 Adding Value to Higher Education Through Mainstreaming of Training in Standardization into University Curricula / *Evgeniya Nikolova, Yanislav Zhelev, Mariya Monova-Zheleva*
- 278 – 288 Challenging the Students’ Sense of Mathematics Via Decoding Problems in Chernorizec Hrabar Tournament / *Borislav Lazarov, Ivailo Kortezov*
- 289 – 300 The Problem of Images’ Classification: Neural Networks / *L.I. Zelenina, L.E. Khaimina, E.S. Khaimin, D.D. Khripunov, I.M. Zashikhina*
- 410 – 424 Learning Analytics Tool for Bulgarian School Education / *Silvia Gaftandzhieva, Rositsa Doneva, George Pashev, Mariya Docheva*
- 490 – 502 Excel’s Calculation of Basic Assets Amortisation Values / *Vehbi Ramaj, Sead Rešić, Arnes Z. Hadžiomerović, Samira Aganović*
- 585 - 597 E-Learning During COVID-19 Pandemic: an Empirical Research / *Margarita Gocheva, Nikolay Kasakliev, Elena Somova*
- 598 - 607 “The Source of Life” in Bishop’s Basilica of Philippopolis in the Context of STEAM / *Toni Chehlarova*
- 608 - 616 Неформални лингвистични турнири на работилница за знание [Informal Linguistic Tournaments] / *Веселин Златилов / Veselin Zlatilov*

350 – 350 IN MEMORIAM

SCIENTIFIC EVENTS / ХРОНИКА

- 438 – 441 Годишни награди за учители по математика и информатика [Annual Awards to Teachers in Mathematics and Computer Science & IT] / *Албена Василева / Albena Vassileva*
- 442 – 442 В Q4 на JCI индикатора на Web of Science [Entering the Q4 of JCI (WoS)] / *Николай Кънчев / Nikolay Kanchev*