

<https://doi.org/10.53656/math2021-5-3-res>

Конкурсни задачи  
Contest Problems

Рубриката се води от проф. д.н. Емил Колев

## РЕШЕНИЯ НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ БРОЙ 4, 2021 Г.

**Задача 1.** Намерете всички взаимно прости естествени числа  $a$  и  $b$ , за които  $\frac{a}{b} = b, a$ .

(Забележка: ако  $a = 13$  и  $b = 79$ , то  $b, a = 79, 13$ )

*Решение.* Нека числото  $a$  има  $k$  цифри. Тогава

$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Leftrightarrow ab = (a - b^2)10^k$ . Тъй като  $a$  и  $b$  са взаимно прости, то

$a - b^2$  е взаимно просто и с  $a$  и с  $b$ . Следователно  $a - b^2 = 1$  и получаваме  $ab = 10^k$ ,

като  $a$  е  $k$ -цифрено число. Това е възможно само когато  $b$  е едноцифрено число или 10, и тъй като  $b$  дели  $10^k$ , то  $b = 1, 2, 4, 5, 8$  или 10. За всяка от тези стойности намираме  $a = b^2 + 1$  и проверяваме верността на равенството от условието. Получаваме единствено решение  $a = 5, b = 2$ .

**Задача 2.** Окръжността  $k$  с център  $O$  е описана около триъгълник  $ABC$ . Точка  $M$  е средата на дъгата  $BC$  от  $k$ , която не съдържа точката  $A$ . Правите през  $O$ , успоредни на  $MB$  и  $MC$ , пресичат  $AB$  и  $AC$  съответно в точки  $K$  и  $L$ . Ако перпендикулярът от върха  $A$  към  $BC$  пресича  $k$  в точка  $N$ , докажете, че  $NK = NL$ .

*Решение.* Тъй като  $\angle ABM = \beta + \frac{\alpha}{2}$  и  $OK$  е успоредна на  $NB$ , то  $\angle BKO = \gamma + \frac{\alpha}{2}$ . Следователно  $\angle BOK = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Аналогично  $\angle CLO = \beta + \frac{\alpha}{2}$  и  $\angle COL = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ . Тъй като  $OB = OC = R$  и  $\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$ , то от синусовата теорема за триъгълници-

те КВО и CLO получаваме  $KB = CL = \frac{R \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ . За да докажем,

че  $NK = NL$ , използваме косинусовата теорема за триъгълниците NBK и NCL. Тъй като  $NB = 2R \cos \beta$  и  $NL = 2R \cos \gamma$ , то е достатъчно да дока-

жем, че  $\cos \beta - \cos \gamma = \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin(\gamma - \beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right)}$ . Това равенство следва директ-

но от  $\cos \beta - \cos \gamma = 2 \sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\gamma - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  и

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma\right) = \cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right).$$

**Задача 3.** Дадена е точка  $P$ , външна за окръжност  $C$ . Отсечките  $PA$  и  $PB$  са допирателни към  $C$ , а точка  $K$  е произволна точка от отсечката  $AB$ . Описаната около триъгълник  $PBK$  окръжност пресича за втори път  $C$  в точка  $T$ . Точка  $P'$  е симетричната на  $P$  относно  $A$ . Докажете, че  $\angle PBT = \angle P'KA$ .

*Решение.* Тъй като КТРВ е вписан четириъгълник  $\angle TAK = \angle TBP$  и  $\angle AKT = \angle BPT$ . Следователно  $\triangle TAK \sim \triangle TBP$ , откъдето получаваме

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}.$$

Това равенство заедно с  $\angle P'AK = \angle BTA$  означава, че  $\triangle P'AK \sim \triangle BTA$  и следователно  $\angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT$ .

## В новите книжки на научните списания на издателство **АЗ.БУКИ** четете

### 6/2021: сп. „Педагогика“

**Превенция и корекция на девиантно и делинквентно поведение, отразени в изкуството: оценка на анализ по алгоритъм** / *Даниел Полихронов*

Предложен е авторски алгоритъм за анализ на произведение на изкуството, свързано с проблема за девиантното и делинквентното поведение и тяхната превенция. Представена е оценка на анализите на студентите върху основата на таксономии на В. Беспалко и Б. Блум.

**Диагностициране на усвоените знания по литература при учениците в IV клас чрез тестова проверка** / *Ива Стаменова*

Настоящата разработка е насочена към диагностика знанията на учениците по литература от IV клас посредством проведено обучение по четене и извънкласно четене. С тестовата проверка учителят има възможността да установи не само равнището на усвоения учебен материал, но и пропуските на четвъртокласниците, за да вземе своевременно мерки по отстраняването им.

### 4/2021: сп. „Български език и литература“

**Рефлексивно-дативни конструкции с опативно значение в българския език** / *Галина Петрова*

Обект на изследване са рефлексивно-дативни конструкции в българския език от типа *танцува ми се* и *иска ми се да танцувам*. Целта на работата е да се съпоставят тези две употреби и да се представи тяхната структурна и семантична специфика, както и условията за употреба.

**Партиципални и/или глаголни морфеми** / *Десислава Димитрова*

Проучването си поставя две основни цели: да се представи морфемното членене на българските причастия според традиционното им описание в глаголната парадигма; да се анализират релационните и класификационните морфеми, присъщи на причастията, с които те се различават от прилагателните имена и глаголите.

### 4/2021: сп. „Стратегии на образователната и научната политика“

**Клъстерни перспективи за конкурентоспособност на висшите училища** / *Гергана Димитрова*

В статията се предлага концептуален модел за ключовите фактори за оценка на конкурентоспособността на висшите училища, с поставен фокус върху сътрудничеството между наука, образование и бизнес като потенциал и способ за конкурентно позициониране.

**Позитивна психология: проблемни области и формиране на личността** / *Стоил Маврогиев, Любомира Димитрова*

Настоящата статия представя генезиса и основните идеи на позитивната психология. Разкрива се човешката личност, пречупена през призмата на позитивната психология. Посочват се проблемните области на позитивната психология, като успоредно с това се набляга на ключовите понятия в горепосочената сфера.

### 4/2021: сп. „Професионално образование“

**Българска адаптация на Въпросника за измерване на дистрес на идентичността** / *Ева Паназова, Маргарита Бакрачева*

Статията представя резултатите от адаптацията на Въпросника за измерване на дистрес на идентичността за български условия с извадка от 202 изследвани лица на възраст от 17 до 30 години. Установи се висока надеждност на въпросника както за цялата скала, така и по отделните подскали.