

РЕФЛЕКСИЯТА В ДЕЙНОСТТА РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ (ВЪРХУ ПРИМЕРИ ОТ 9 КЛАС)

Дарина Гълъбова, Минчо Бейков

Резюме. В статията се разглеждат няколко теми от учебното съдържание за 9 клас. Предложен е рефлексивен подход, за който се твърди, че е ефективен при решаване на съответни задачи. Твърдението не е подкрепено с педагогически експеримент.

Keywords: reflection, problem solving, 9th grade curriculum

Успешното изучаване на математика в училище зависи от осъзнатите методи и средствата, с които се осъществява учебната дейност и от това доколко субектите на учебния процес правилно оценяват своите постижения и възможности. За постигане на тези цели съдейства *рефлексията*. Сред изследователите на рефлексията са Дж.Дюи, Клапаред, Ж.Пиаже, А.Хуторской, Д.Шьон, П.Николов, Л.Десев, В.Василев, М.Георгиева и много други. За същността на рефлексията има над 100 разбирания и трактовки, без да може да се даде единно определение за този сложен психологически акт [1]. През 1987г. съвременният американски автор Доналд Шьон въвежда два ключови термина: *«рефлексия в действието»*, която протича без прекъсване на действието, обикновено в интерактивен режим, и *«рефлексия над действието»*, която се осъществява след неговото завършване и се проявява като ретроспективен критичен анализ и оценка на вече стореното. В традиционните уроци се осъществява най-вече рефлексия над действието (най-често в заключителната част на урока). Въпреки многобройните изследвания на рефлексията недостатъчно е изследвана „рефлексията в действието”, като тук ще изследваме рефлексията в дейността решаване на задачи. Затова акцентът на тази статия е рефлексивната учебна дейност, илюстрирана върху примери от учебното съдържание за 9 клас. Акцентира се на следните теоретични постановки, разкриващи важни характеристики на рефлексията [1,2,3,4,5,6,11]:

➤ Рефлексията е процес, чрез който някой отразява, когато той се опитва да реструктурира неговия опит или знание (Ф.А.Й.Кортхаген);

➤ Рефлексията има и инструментално значение – тя е способ за решаване на учебни проблеми и задачи. За да започне рефлексивната дейност на учениците е необходимо да се прекрати решаването на задачата и да се започне изясняване на причините за затруднението. Към задачата се връщаме след откриване на причините и намиране на начини за решаването на задачата (А.В.Хуторской);

➤ Рефлексията се активизира в нестандартни ситуации и нейното начало е някакво затруднение или двойствена ситуация (дилема), предлагаща алтернативи (Дж.Дюи);

➤ Рефлексивната дейност включва: анализ на дейността, критика на предходната дейност на основата на анализа, търсене на нови норми (алтернативи) на дейността (О.С.Анисимов).

Статията предлага алгоритъм на рефлексивната дейност за решаване на задачи, който се базира на модела **ALACT** на проф.Ф.А.Й.Кортхаген. Наименованието **ALACT** е абrevиатура от първите букви в наименованията на фазите на рефлексията: 1. Действие (**A**ction); 2. Поглеждане назад към действието (**L**ooking back on the action); 3. Осъзнаване на основни аспекти (**A**wareness of the essential aspects); 4. Създаване на алтернативни методи за действие (**C**reating alternative methods of action); 5. Изпробване (**T**rial). В петфазовия модел на рефлексията се съдържат основните етапи на рефлексивната дейност по математика (фиг.1). Ще покажем етапите на рефлексията при решаване на задачи от учебното съдържание за 9 клас, като следваме фазите на модела **ALACT** (Таблица 1.)



фиг. 1

Таблица 1. Алгоритъм за рефлексивна дейност при решаване на задачи – примери от 9 клас

Фази на модела ALACT	Тема. Съкратена формула за корените на квадратно уравнение
Фаза 1. Действие Решаване на примерна задача 1. Да се решат квадратните уравнения: а) $3x^2 + 16x - 12 = 0$ б) $5x^2 - 34x + 45 = 0$	Опитът показва, че деветокласниците добре решават квадратно уравнение, прилагайки основната формула. Голяма част от тях не знаят или не се досещат да използват съкратената формула. В преговорния урок, след припомняне как се решава квадратно уравнение е целесъобразно да се предложи задача 1. Учениците решават сравнително лесно уравнението 1а), като получават $D=400$. Някои от тях са раздразнени от факта, че трябва да умножават двуцифрени числа. Тяхната демотивация се увеличава при решаване на зад. 1б). когато трябва да изчислят $D=1156 - 900 = 256$.
Фаза 2. Поглеждане назад към действието <i>Диалогова рефлексия</i> Какво се случи? Какво искахте да намерите? Как се чувствате?	У учениците се натрупва негативност при изчисленията. Още повече, че не се разрешава ползване на калкулатор. В този момент учителят трябва да покаже повече съпричастност към появилите се трудности и да се опита да повлияе на настроението чрез беседата: Имахте ли затруднения? Кое поражда трудностите? Харесват ли ви задачи от този вид? Какво направихте, за да решите задачата (коя формула използвахте)? Какво мислите? Мисленето на учениците се насочва към промяна на прилагания досега метод за решаване.
Фаза 3: Осъзнаване на основните аспекти Какво беше важно за мен (за учителя/за учениците)?	Възниква необходимостта от припомняне или въвеждане на теоретични елементи, които да подпомогнат и облекчат решаването на уравнения от този вид. Те се предлагат от учителя с насочващи въпроси: Освен общата формула за корените на квадратно уравнение, известна ли е и друга формула за корените на квадратното уравнение, с която да улесним пресмятанията?
Фаза 4: Създаване на алтернативни методи на действие Търсят се нови начини за справяне със ситуацията (нова теория, нови методи, способности, идея или др.)	Учениците съвместно с учителя откриват алтернативен метод на действие. След като се припомни съкратената формула (ако е необходимо се извежда отново), тя се прилага при решаването на задача 1б). Този път $D=49$, което прави обучаемите позитивно настроени към подобни пресмятания. <i>Диалогова рефлексия:</i> Какво е положителното при тази формула (показва се значение на откритието, какви са предимствата на метода)? Как ще се досещате да я използвате в бъдеще (От какво зависи използването ѝ)?
Фаза 5. Изпробване Прилага се новия метод (способ, похват, идея и др.) при задачи от същия вид.	Задължително е откритата алтернатива веднага да бъде рефлекситирана в нова реална ситуация, като се даде примерна задача 2. Да се решат квадратните уравнения: а) $x^2 - 50x + 49 = 0$ б) $7x^2 - 112x - 64 = 0$.

В следващото изложение се демонстрира действието на алгоритъма за рефлексивна дейност като се следват петте фази на модела ALACT при решаване на примерни задачи (№3 – №8) от различни урочни теми.

Тема „Формули на Виет. Приложение”

Фаза 1. Действие. На учениците се предлага самостоятелно да решат следната примерна задача 3.: „Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $f(x)=0$, пресметнете стойността на израза $x_1^2 + x_2^2$, ако:

а) $f(x) = x^2 - 3x - 4$; б) $f(x) = x^2 - x - 1$; в) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

Учениците използват формулата за корените на квадратното уравнение при решаване на подточка 3а). и лесно определят корените $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, откъдето $x_1^2 + x_2^2 = 4 + (-1) = 17$

При решаване на подточка 3б) намират $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и замествайки в израза $x_1^2 + x_2^2$ получават $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2$, което води до по-сложни преобразувания, а оттам и до грешки в крайния резултат. Появява се психическо напрежение и нежелание за пресмятане на по-сложни изрази. Това негодувание нараства при решаването на подточка 3в), в която се получава $D < 0$ и отговорът на всички ученици е, че задачата няма решение.

Фаза 2. Поглеждане назад към действието. Реализира се диалогова рефлексия над действието: Коя подточка от задачата ви хареса най-много; а коя не ви хареса? Защо, какво ви затрудни в нея? Имате ли търпението да пресмятате ирационални изрази? А какво да правим в подточка 3в)? Дали няма някакъв по-рационален, „хитър” и по-лек начин за решението на тази задача?

Фаза 3. Осъзнаване на основните аспекти. След рефлексивния анализ над действието, учениците са мотивирани да търсят новия метод. Това е моментът в урока за мотивация на новото знание (показва се портрета на Виет). Учителят шеговито споделя, че надали има човек по света със завършено средно образование, който не познава този френски учен и който да не знае неговите формули за връзката между корените, коефициентите и свободния член на едно квадратно уравнение. Името му е Франсоа Виет, а формулите му днес са известни като формулите на Виет.



Фаза 4. Създаване на алтернативни методи на действие. Извеждат се формулите на Виет, които по същество са алтернативен метод за решаване на квадратни уравнения. След като учениците се запознаят с новия метод отново се решава подточка 3а). Тук отново има проблем, защото реално в $(x_1^2 + x_2^2)$ изразите от формулите на Виет липсват. Всичко доказано сякаш се обезсмисля (*отново сме във фаза 2. Поглеждане назад към действието*). Появява се необходимост от преобразуване на този израз. Учениците се намират във фаза 3. „Осъзнаване на нови аспекти (запознаване с нови теоретични елементи) като чрез подходящи въпроси колективно се достига до представянето:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2$$

Сега вече „Формулите на Виет” удобно се прилагат и с тях леко се решават подточките 3а), 3б) и дори 3в), където реални корени не съществуват.

Фаза 5. Изпробване. Новооткритият алтернативен метод се прилага (изпробва веднага) за решаване на примерната **задача 4**. „Ако x_1 и x_2 са корените на квадратното уравнение $x^2 + x - 1 = 0$, пресметнете стойността на израза $x_1^3 + x_2^3$ ”.

Тема „Решаване на ирационални уравнения”

Ще разгледаме задачи, при които рефлексията помага за правилно усвояване на ново понятие. В урока по тази тема са дадени определенията за ирационално уравнение и уравнение следствие, и са решени поне две уравнения, в които има чужди корени.

Фаза 1. Действие. Преминава се към решаване на примерна **задача 5**. Решете уравненията: а) $x + 2\sqrt{x}\sqrt{x} = 3$; б) $x + x\sqrt{2}\sqrt{2} = 1$

Като се използва показаният метод, лесно се получава $2\sqrt{x}\sqrt{x} = 3 - x$, откъдето чрез повдигане на квадрат на двете страни на уравнението и решаване на полученото квадратно уравнение и проверка се намира решението $x=1$. Решаването на зад.5б) мнозинството ученици провеждат „аналогично”:

$$\begin{aligned} x + x\sqrt{2}\sqrt{2} &= 1 \\ x\sqrt{2}\sqrt{2} &= 1 - x \\ 2 \cdot x^2 &= 1 + x^2 - 2x \\ x^2 + 2 \cdot x - 1 &= 0 \\ x_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

При проверката се установява, че $x = -1 - \sqrt{2}\sqrt{2}$ не е решение на уравнението.

Фаза 2. Поглеждане назад към действието. Реализира се диалогова рефлексия над действието. И в тази задача дейността решаване е свързана с „неприятни” ирационални изрази. *Диалогова рефлексия:* Трудно ли извършихте пресмятанията?

Правилно ли приложихте метода? А дали бе нужно да извършвате тези пресмятания? При уравнения от кой вид се прилага този метод?

Фаза 3. Осъзнаване на основни аспекти. Осмислянето на теоретичните основания е свързано с въпроса: „Какво наричаме ирационално уравнение?“ Правилният отговор насочва учениците към **фаза 4. Създаване на алтернативни методи на действие.** Оказва се, че уравнението в зад. 5б) не е ирационално, а е линейно уравнение и то се решава с друг метод.

Фаза 5. Изпробване. С метода на еквивалентността се решава линейното уравнение:

$$x + x \sqrt{2} \sqrt{2} = 1$$

$$x(1 + \sqrt{2} \sqrt{2}) = 1$$

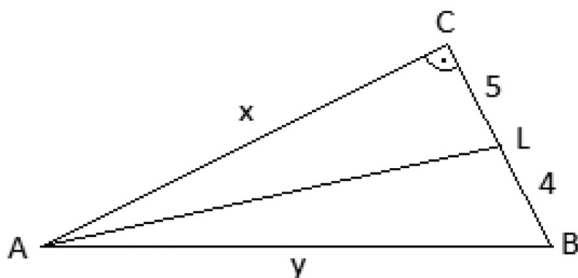
$$x = \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}},$$

откъдето след рационализиране получаваме $x = -1 + \sqrt{2} \sqrt{2}$.

Тема. Свойство на ъглополовящата в триъгълника

Има случаи, при които учениците правилно научават теорема или свойство, но при формалното им прилагане се получават грешни или абсурдни отговори. Илюстрация на това твърдение е решението на следващата примерна задача 6. Тази задача се разглежда в урока, след като е доказана теоремата за вътрешната ъглополовяща на ъгъл в триъгълник и тази теорема е прилагана в решението на поне една задача.

Фаза 1. Действие. Решава се **задача 6.**: Правата, която разполовява един от острите ъгли на правоъгълен триъгълник, дели срещуположния катет на две отсечки с дължини съответно 4 см и 5 см. Определете дължините на страните на триъгълника.



Фаза 1. Действие. Голяма част от учениците решават задачата по следния начин: Нека $\triangle ABC$ е правоъгълен триъгълник, AL е ъглополовяща и $BL = 4$ см;

CL = 5 cm. Означаваме AC= x ; BC = y (фиг.2). От свойството на ъглополовящата следва пропорцията:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{5} \quad y = \frac{4}{5}x$$

От Питагоровата теорема се получава $y^2 = x^2 + 81$. Учениците решават системата чрез заместване и достигат до уравнението $9x^2 = -25.81$, което няма решение.

Фаза 2. Поглеждане назад към действието: Защо не получаваме решение като правилно прилагаме теореми и определения? Дали сме допуснали някъде грешка? Къде може да е тази грешка? Тъй като при решаване на системата няма допусната грешка, се достига до извода, че нещо в условието на задачата не е правилно анализирано.

Фаза 3. Изясняване на основни аспекти. Чрез рефлексивна беседа се изяснява, че за да бъде спазено съответствието при пропорцията, по-голямата отсечка (5cm) трябва да е прилежаща на хипотенузата (y).

Фаза 4: Създаване на алтернатива. Прави се изводът, че първоначално съставената пропорция е невярна. В новата ситуация дължините на BL и CL са съответно: BL=5cm, а CL=4cm.

Фаза 5. Изпробване на алтернативата. При новата ситуация системата придобива вида:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{5y}{4x} = \frac{5}{4} \\ y^2 = x^2 + 81 \text{ от където получаваме } y = 15; x = 12 \end{array} \right.$$

Следователно AB = 15 cm ; AC = 12 cm ; BC = 9 cm.

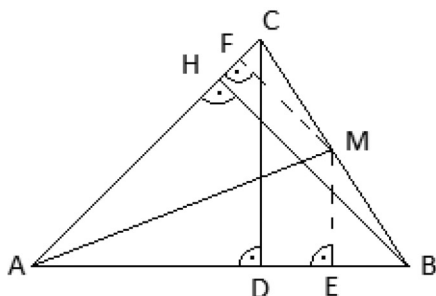
Тема. Приложение на тригонометричните функции на остър ъгъл в задачи от планиметрията

Ще разгледаме една задача, „неплашеща” слабите ученици със своята несъмнена сложност и едновременно даваща възможност на по-силните ученици в достатъчна степен да се проявят.

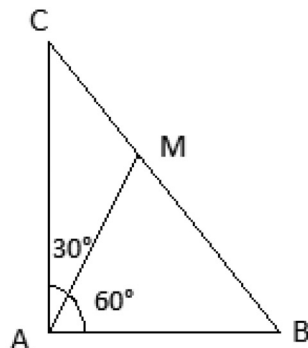
Фаза 1. Действие. Учениците решават примерната задача 7.:

“Медианата, излизаща от единия връх на триъгълника е равна на 1cm и е равна на височината, спусната от другия връх; а височината, спусната от третия връх е равна на 3cm. Да се намери лицето на триъгълника”.

Решение: Нека $\triangle ABC$ има медиана $AM=1$ cm, височина $BH=1$ cm и височина $CD=\sqrt{3}\sqrt{3}$ cm. (фиг.3).



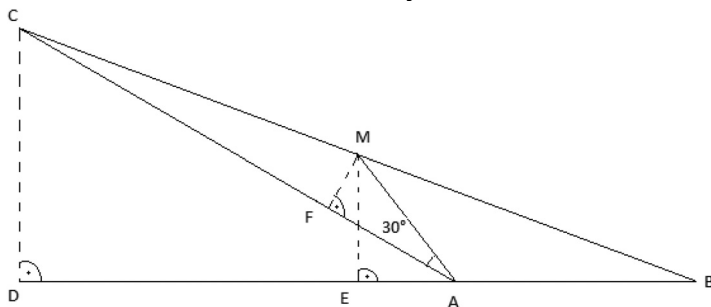
Фиг. 3



Фиг. 4

Построяваме $MF \parallel BH$. Тогава в $\triangle BCH$, $MF = \frac{11}{22}BH = \frac{11}{22}$ cm като средна отсечка. От $\triangle AMF$: намираме $\sin \angle MAC = \frac{MF}{AM} = \frac{11}{22}$, откъдето $\angle MAC = 30^\circ$. Построяваме ME успоредна на CD и чрез аналогични разсъждения намираме от $\triangle AME$ $\sin \angle MAB = \frac{ME}{AM} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}$, откъдето $\angle MAB = 60^\circ$. Следователно $\angle BAC = 90^\circ$ и $\triangle ABC$ е правоъгълен с катети $BC = 1$ cm и $AC = 3$ cm (фиг. 4). Лицето на този триъгълник е равно на $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$.

Фаза 2. Погледжане назад към действието. Анализира се решението чрез въпросите: В условието на задачата казано ли е какъв е видът на триъгълника? А колко ще е лицето, ако $\angle BAC$ е по-голям от 90° , т.е. тъп? По този начин учениците се насочват към **фаза 3 (осъзнаване на основни аспекти)** и разбират, че решението на задачата не е пълно. Те са убедени, че е необходимо разглеждането на алтернативата $\angle BAC$ да е тъп (**фаза 4.**), която изисква конструиране на нов чертеж (фиг. 5). и решаване на задачата в този нов случай.



Фиг. 5

Фаза 5. Изпробване. В този случай решението е на малко по-високо ниво на професионализъм.

Решение: Медианата $AM=1$ см; височината $BH=1$ см и височината $CD=\sqrt{3}\sqrt{3}$ см. В $\triangle BHC$ намираме $MF=\frac{11}{22}$ $BH=\frac{11}{22}$ см като средна отсечка. Тогава от $\triangle AMF$ $\sin\angle MAF=\frac{MF}{AM}=\frac{MF}{AM}=\frac{11}{22}$, откъдето $\angle MAF=30^\circ$. В $\triangle BDC$ отсечката $ME=\frac{11}{22}$ $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см, като средна отсечка. Тогава от $\triangle AEM$ намираме $\sin\angle MAE=\frac{ME}{MA}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}$, откъдето $\angle MAE=60^\circ$. Следователно $\angle DAC=30^\circ$, откъдето $\angle BAN=\angle DAC=30^\circ$. Определяме AB от правоъгълния $\triangle ANB$ и $\frac{BN}{AB}=\frac{BN}{AB}=\sin\angle BAN=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{11}{22}$ и следователно $AB=2$ см. Лицето на $\triangle ABC=\frac{11}{22}$ $AB\cdot CD=\sqrt{3}\sqrt{3}$ см². По този начин задачата има два отговора: $\frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}$ см² и $\sqrt{3}\sqrt{3}$ см².

Заклучение

Предложените теми и задачи от математическото учебно съдържание за 9 клас са опит да се покаже приложението на рефлексията в дейността решаване на задачи. Рефлексията може успешно да се приложи както в други теми от учебното съдържание за 9 клас (системи уравнения от втора степен с две неизвестни, подобни триъгълници, метод на хомотетията за решаване на задачи за построение и т.н.), така и в други класове. Практиката показва, че рефлексията е един от механизмите за превръщане на обучението в оптимално взаимодействие между учебното съдържание и изживяващият се субектен опит на всеки ученик чрез проблемите на това съдържание.

БЕЛЕЖКИ

1. www.prosolva.org/spip/spip.php?article205. Какво е рефлексия? Ард Зонефелд

ЛИТЕРАТУРА

1. Василев, В. (2006). *Рефлексията в познанието, самопознанието и практиката*. Пловдив: Маркос.
2. Ганчев, Ив. (1999). *Основни учебни дейности в урока по математика*. София: Модул-96.

3. Георгиева, М. (2001). *Рефлексията в обучението по математика V-VI клас*. Велико Търново: Faber.
4. Георгиева, М. (2006). Ейдетика-рефлексия-синектика-синергетика (в системата „обучаващ-обучаван”), *Научно-приложна конференция*, 249-255
5. Гълъбова, Д., Бейков. М. (2009). Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическото мислене при изучаване на „Еднаквости” I, *Математика и информатика*, 4.
6. Гълъбова, Д., Бейков. М. (2009). Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическото мислене при изучаване на „Еднаквости” II, *Математика и информатика*, 5.
7. Гълъбова, Д., Бейков. М. (2009). Интерактивни образователни технологии за стимулиране на критическото мислене при изучаване на „Еднаквости” III, *Математика и информатика*, 6.
8. KORTNAGEN, F.A.J.(1992). Reflectie en de professionle ontwikkeling van leraren. *Pedagogische Studieen*, 69, 112-123
9. Лозанов, Ч., Витанов, Т., Недевски. П. (2009). *Математика за 9 клас. Задължителна подготовка*. София: Анубис
10. Лозанов, Ч., Витанов, Т., Недевски. П. (2009). *Математика за 9 клас. Профилирана подготовка*. София: Анубис
11. Лицман, В. (1975). *Къде е грешката?* - София: Техника.
12. Шаригин, И. (1988). Търсете вариантите. *Обучението по математика*, 1, 5-12.

✉ Даринка Гълъбова

Доцент, Доктор

Великотърновски Университет „Св. Св. Кирил и Методий”

В.Търново – 5000, ул. Седми Юли 19

E-mail: darka_galabova@abv.bg

Минчо Бейков

СОУ „Емилиян Станев”

Велико Търново 5000, бул. България 68

E-mail: mich08@abv.bg

REFLECTION ON THE ACTIVITY OF SOLVING PROBLEMS

Abstract. Several topics from the 9th grade curriculum are considered in the paper. An approach by reflection is proposed and the assertion is that this approach is effective in a corresponding problem solving. The assertion is not supported by a case study.

Darinka Galabova

Doctor

St. Kiril and St. Methodius University of Veliko Turnovo

19 Sedmi Iuli str., Veliko Turnovo, Bulgaria

E-mail: darka_galabova@abv.bg

Mincho Bejkov

„Emiliyan Stanev” High School

68 Bulgaria bul., Veliko Turnovo, Bulgaria

E-mail: mich08@abv.bg